

Série d'exercices N° 3 : Séries entières

Exercice 1 : Déterminer le rayon de convergence et la nature pour $x = \pm R$ des séries entières suivantes :

$$1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4^n} x^n \quad 2) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-3n} x^n \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\text{Log} \left(1 + \frac{1}{2^n} \right) \right) x^n$$

$$4) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{4^n (2n+1)} \quad 5) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n! n^n} x^n \quad 6) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} x^n, a > 0.$$

Exercice 2 : Donner le domaine de convergence des séries entières suivantes :

$$1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4^n} x^{2n+1} \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n + n} x^{3n-1}.$$

Exercice 3 : Calculer le rayon de convergence puis la somme des séries entières suivantes :

$$1) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} \quad 2) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+3}{2n+1} x^n \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^2+1}{n!} x^n \quad 4) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n} x^n.$$

Exercice 4 : Donner le développement en séries entières des fonctions suivantes et donner le domaine de convergence.

$$1) f(x) = \frac{2}{x^2 - 4x + 3} \quad 2) f(x) = \text{Log}(1 - 4x^2) \quad 3) f(x) = (1+x)e^{-x} \quad 4) f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Exercices supplémentaires

Exercice 1 : Déterminer une solution développable en séries entières de l'équation différentielle

$$2xy'' + y' - y = 0,$$

puis calculer la somme de la série obtenue à l'aide de fonctions élémentaires.

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes en développant en séries entières les fonctions sous les signes d'intégration.

$$1) \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \text{ à } 10^{-5} \text{ près} \quad 2) \int_0^1 e^{-x^2} dx \text{ à } 10^{-3} \text{ près} \quad 3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x^2) dx \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$