$2^{ème}$ Année GP Section G

Année universitaire 2012-2013 Semestre 2

Chargé de Cours : LAADJ Toufik

Email : laadjt@gmail.com

Site web : http://perso.usthb.dz/~tlaadj/

Horaire : Mercredi $13^h00 - 14^h30$ Amphi L

Objectif du Cours :

Maitriser les concepts et les résultats fondamentaux de variable complexe de manière à pouvoir les utiliser dans d'autres cours

Contenu du Cours :

- Les nombres complexes
- Fonctions complexes
- Dérivation complexe, équations de Cauchy Riemann.
- Intégration complexe, théorème de Cauchy
- Séries infinies, séries de Taylor, séries de Laurent.
- Théorème des Résidus. Calcule d'intégrales par la méthodes des résidus.

Chapitre 1

1. Nombres complexes :

1.1 L'ensemble des nombres complexes :

- Question : Trouver un nombre réel solution de l'équation $x^2+1=0$
- Réponse : Il n'exist pas de nombre réel x qui soit solution de $x^2+1=0 \rightarrow x^2=-1$
- Pour donner les solutions à cette équation, on introduit les nombres complexes on pose $i^2=-1$, $i=\sqrt{-1}$, on appelle i l'unité imaginaire.

Définition 1.1

Un nombre complexe s'écrit sous la forme $z=a+bi$ (forme algébrique)

a et b sont des nombres réels

Le nombre 'a' est appellé la partie réelle de z. $a=Re(z)$

Le nombre 'b' est appellé la partie imaginaire de z. $b=Im(z)$

L'ensemble des nombres complexes noté par $\mathbb{C}$

Définition 1.2

Deux nombres complexes z et w sont égaux si et seulement si

$$Re(z)=Re(w) \text{ et } Im(z)=Im(w)$$

Opérations sur les nombres complexes :

Soient $z=x+iy$ et $w=u+iv$

- Addition $z+w=(x+u)+i(y+v)$
- Soustraction $z-w=(x-u)+i(y-v)$
- Multiplication : $zw=(x+iy)(u+iv)=xu+xvi+yui+i^2yv$

$$=(xu-yv)+(xv+yu)i$$

- Division : $\frac{z}{w}=\frac{x+iy}{u+iv}=\frac{x+iy}{u+iv}\cdot\frac{u-iv}{u-iv}=\frac{xu+yv}{u^2+v^2}+\frac{yu-xv}{u^2+v^2}i$

Définition 1.3 :

Soit $z=x+iy$. La valeur absolue ou module du nombre complexe z est définie par $|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}$.

- Le conjugué du nombre complexe z est $\overline{z}=x-iy$

Remarque : (i) $\sqrt{x^2} = |x|$ si $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 = |x|^2$

(ii) $|z|^2 \neq z^2$ si $Im(z) \neq 0$

Exercise : Montrer que a) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

b) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

Lemme 1.1 Soient $z, w \in \mathbb{C}$

(i) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ (iii) $\bar{\bar{z}} = z$

(ii) $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$ (4i) $z\bar{z} = |z|^2$

Preuve : Exercice

Lemme 1.2 : $z, w \in \mathbb{C}$

(i) $|zw| = |z||w|$ (ii) $|\bar{z}| = |z|$

(iii) $z + \bar{z} = 2\,\mathcal{R}(z)$ (4i) $z - \bar{z} = 2\,Im(z)\,i$

(5i) $|z+w| \leq |z| + |w|$ inégalité triangulaire.

Preuve Exercice !

Remarque : Si $z, w \in \mathbb{C}$ $w \neq 0$, alors

(i) $\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$

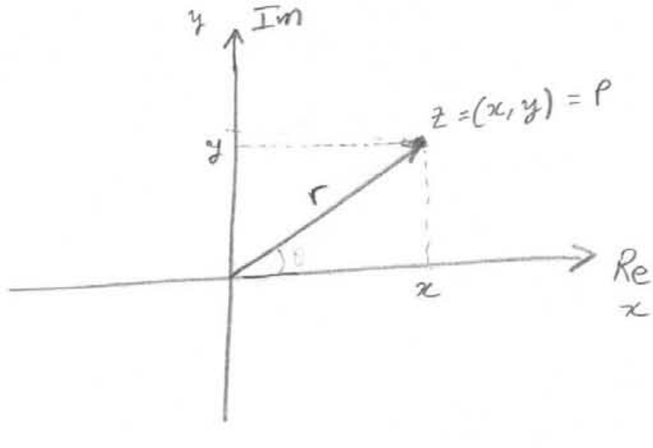
(ii) $|z - w| \geq \big||z| - |w|\big|$ inégalité triangulaire inverse.

Exemple :

$$\frac{2+3i}{1-2i} = \frac{2+3i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{-4}{5} + \frac{7}{5}i$$

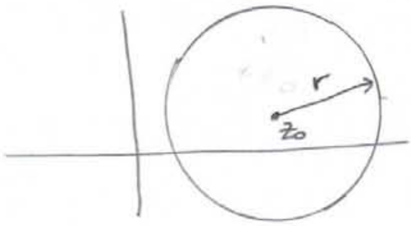
1.2 Plan complexe :

- P désigne un point du plan complexe correspondant à un nombre complexe (x, y) ou $x + iy$



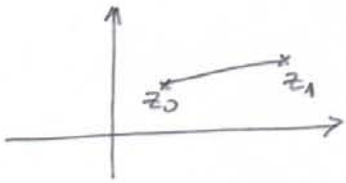
Courbes dans le plan complexe

<u>Cercle</u> $|z - z_0| = r$



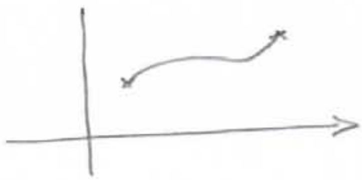
<u>Segment</u>

$$\{ z = (1-t)z_0 + t z_1 , \quad t \in [0,1] \}$$

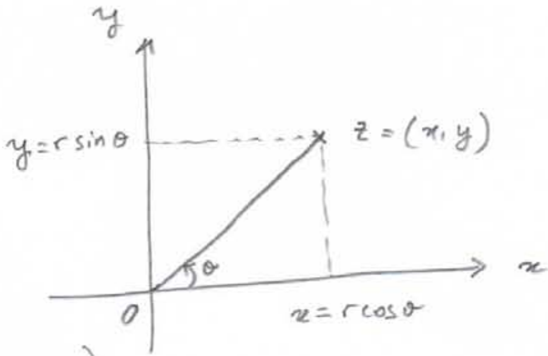


<u>Courbe linéaire</u>

$$\{ z = x + i f(x) , \; a \leq x \leq b \}$$



Forme polaire des nombres complexes



$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

- $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$: module de z
- θ : l'amplitude ou l'argument de z ($\arg(z)$).

Si $-\pi < \theta < \pi$, alors

θ est l'argument principale, noté par Arg

On a $\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi$

Formule de De Moivre :

Si $z_1 = x_1 + i y_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$z_2 = x_2 + i y_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$,

alors $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$

i.e $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ et $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

Une généralisation :

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n \left(\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) + i \sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) \right)$$

Ce qui conduit à $z^n = r^n \left(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \right)$, $n \in \mathbb{N}$

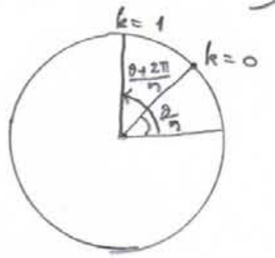
et $z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right)$, $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i \sin(\theta_1-\theta_2) \right)$.

Racines $n^{ième}$ d'un nombres complexe :

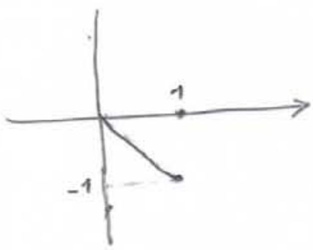
Si $z = x+iy = r(\cos\theta + i \sin\theta)$

Alors $z^{\frac{1}{n}} = \left\{ r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta+2k\pi}{n} \right), \ k=0,1,2,\ldots,n-1 \right\}$



Exemple 1 : Calculer $\sqrt[3]{1-i}$

$$z = 1-i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4} \right)$$



$$z^{\frac{1}{3}} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}{3} \right)$$

$k=0,1,2$.

$\rightarrow k=0$: $\left(z^{\frac{1}{3}}\right)_0 = 2^{\frac{1}{6}} \left(\cos \frac{-\pi}{12} + i \sin \frac{-\pi}{12} \right)$

$k=1$: $\left(z^{\frac{1}{3}}\right)_1 = 2^{\frac{1}{6}} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$

$k=2$: $\left(z^{\frac{1}{3}}\right)_2 = 2^{\frac{1}{6}} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$

Exemple 2 $n^{ième}$ racines de 1

$$\omega^n = 1 = \cos 0 + i \sin 0$$

$$\rightarrow \omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k=0,1,2,\ldots,n-1.$$