Chapitre 2 :

2. Fonctions complexes :

Définition : Soient A et B deux ensembles non-vides dans $\mathbb{C}$

Si à chaque valeur $z \in A$, il correspond une ou plusieurs valeurs w dans B, nous dirons que w est une fonction de z

$$f : A \longrightarrow B$$
$$z \longmapsto w = f(z)$$

- z appelée la variable independent
- w appelée la variable dependent

Example : $f(z) = z^2$

Définition :

- Si une seule valeur de w correspond à chaque valeur de z, nous dirons que w ou $f(z)$ est une fonction uniforme de z.
- Si plusieurs valeurs de w correspondent à chaque valeur de z, nous dirons que w ou $f(z)$ une fonction multiforme de z.

- une fonction multiforme est un ensemble de fonctions uniformes, chaque élément est appelé une branche de la fonction.
- On choisit un élément comme branche principale ou détermination principale.

Example 1 : $f(z) = z^2$ est une fonction uniforme de z

Example 2 : $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ est une fonction multiforme de z

- Si $w = f(z)$, on peut considérer z comme fonction de w, on écrit $z = f^{-1}(w)$. f^{-1} : fonction inverse de f.
- Si $z = x + iy$, la fonction $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$$u = Re(f) \quad , \quad v = Im(f).$$

Exemple : $f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3yx^2 - y^3)$

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x,y) = 3yx^2 - y^3.$$

2.1 Les fonctions élémentaires :

- Les fonctions polynômials.

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \equiv P(z).$$

$$a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Les fonctions rationnelles.

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad P, Q \text{ sont des pôlynômes.}$$

Example : $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ où $ad - bc \neq 0$ est appelée transformation homographique.

- Les fonctions exponentielles.

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

- Les fonctions trigonométriques.

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sec(z) = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \qquad \operatorname{cosec}(z) = \frac{1}{\sin(z)} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

$$tg(z) = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

La plupart des properiétés des fonctions trigonométriques réelles sont encore valables dans le cas complexe.

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad 1 + tg^2 z = \sec^2 z, \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 z = \operatorname{cosec}^2 z$$

$$\sin(-z) = -\sin(z), \quad \cos(z) = \cos(-z), \quad tg(-z) = -tg(z)$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

$\vdots$

- Les fonctions hyperboliques

$$sh\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad ch\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$sech\, z = \frac{1}{ch\, z} = \frac{2}{e^{z} + e^{-z}} \qquad csch\, z = \frac{1}{sh\, z} = \frac{2}{e^{z} - e^{-z}}$$

$$th\, z = \frac{sh\, z}{ch\, z} = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}} \qquad coth\, z = \frac{sh\, z}{sh\, z} = \frac{e^{z} + e^{-z}}{e^{z} - e^{-z}}$$

Les properiéties suivantes sont vérifiées.

$$ch^2 z - sh^2 z = 1 \qquad 1 - th^2 z = sech^2 z \qquad coth^2 z - 1 = csch^2 z$$

$$sh(-z) = -sh\, z \qquad ch(-z) = ch\, z \qquad th(-z) = -th(z)$$

$$sh(z_1 + z_2) = sh\, z_1\, ch\, z_2 + ch\, z_1\, sh\, z_2$$

$$ch(z_1 + z_2) = ch\, z_1\, ch\, z_2 - sh\, z_1\, sh\, z_2 .$$

$$th(z_1 + z_2) = \frac{th\, z_1 + th\, z_2}{1 + th\, z_1\, th\, z_2}$$

Les fonctions trigonométriques (ou circulaires) et les fonctions hyperboliques sont liées par les relations:

$$\sin iz = i\, sh\, z \qquad \cos(iz) = ch\, z \qquad tg(iz) = i\, th\, z$$

$$sh(iz) = i \sin z \qquad ch(iz) = \cos z \qquad th(iz) = i\, tg\, z$$

- Fonctions logarithmiques.

La fonction $Log\, z$ est définie comme l'inverse de e^{z}

$$w = Log\, z \iff z = e^{w} .$$

Théorème:

$$Log\, z = Log|z| + i\left(Arg(z) + 2k\pi\right) \qquad k \in \mathbb{Z},\ z \neq 0 .$$

Preuve: $z = x + iy$, $w = u + iv$

$$z = e^{w} \iff x + iy = e^{u+iv} = e^{u}(\cos v + i \sin v)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z| = e^{u} \\ v = \arg z = Arg(z) + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Log\, z = w = u + iv = Log|z| + i\underbrace{\left(Arg(z) + 2k\pi\right)}_{\arg(z)} \qquad k \in \mathbb{Z} .$$

Remarque: 1) $Log\, z$ est une fonction multiforme.

Remarque 2 : La détermination principale ou valeur principale de Log z (branche principale) est définie par

$$\text{Log}\, z = \text{Log}\,|z| + i\, \text{Arg}(z).$$

$$-\pi \leq \text{Arg}(z) < \pi$$

Example :

$$\text{Log}(-1) = \text{Log}\,|-1| + i\,\arg(z) = i(\pi + 2k\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

La détermination principale est $\text{Log}(-1) = i\pi$

Les properiétés suivantes sont verifiées dans $\mathbb{C}$

- $\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log}\, z_1 + \text{Log}\, z_2 \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $\text{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Log}\, z_1 - \text{Log}\, z_2 \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $\text{Log}\, z^n = n\, \text{Log}\, z \qquad z \in \mathbb{C}.$

- Les fonctions z^α et a^z : z^α et a^z sont définies par

$$z^\alpha = e^{\alpha \text{Log}\, z}, \quad a^z = e^{z \text{Log}\, a}$$

Example : $i^{-i} = e^{-i \text{Log}\, i} = e^{-i\left(0 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)} = e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \qquad k \in \mathbb{Z}$

La valeur principale est $i^{-i} = e^{\frac{\pi}{2}}$.

Remarque : • $(z^\alpha)^k = z^{\alpha k} \qquad \alpha \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}$

• $(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\beta}$ dans le cas général $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}$.

Example : $(i^2)^i = (-1)^i = e^{i(i\pi + i2k\pi)} = e^{-(\pi + 2k\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$

mais $i^{2i} = e^{2i\left(i\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = e^{-(\pi + 4k\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}.$

- Fonctions trigonometriques inverses.

$$\arcsin(z) = \frac{1}{i}\text{Log}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \qquad \arccos(z) = \frac{1}{i}\text{Log}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$\text{arctg}(z) = \frac{1}{2i}\text{Log}\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right) \qquad \text{arcotg}(z) = \frac{1}{2i}\text{Log}\left(\frac{z + i}{z - i}\right)$$

- Fonctions hyperboliques inverses :

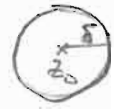
$$\text{argsh}(z) = \text{Log}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right) \qquad \text{argch}(z) = \text{Log}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\text{argth}(z) = \frac{1}{2}\,\text{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \qquad \text{argcoth}(z) = \frac{1}{2}\,\text{Log}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

2.2 Limites :

Définition (voisinages)

- Un delta, ou δ, voisinage d'un point z_0 est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - z_0| < \delta\}$ $\delta > 0$
- Un δ voisinage pointé de z_0 est un voisinage dans lequel le point z_0 est omis. ie $0 < |z - z_0| < \delta$.

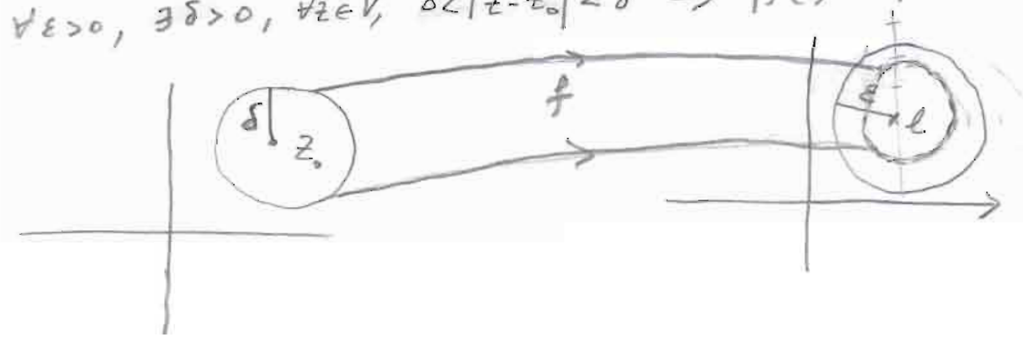


Soit $f(z)$ une fonction uniforme définie dans un voisinage V de z_0 sauf peut-être en $z = z_0$ (ie δ voisinage pointé de z_0)

on dit que $l \in \mathbb{C}$ est la limite de $f(z)$ quand z tend vers z_0

et on écrit $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall z \in V,\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$$



Remarque : Quand la limite d'une fonction existe, elle est unique.
si $f(z)$ est multiforme la limite peut dependre de la branche choisie

Continuité : Soit $f(z)$ une fonction uniforme definie dans V un voisinge de z_0 et définie en z_0.

La fonction $f(z)$ est dite continue en z_0 si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Example : $f(z) = \begin{cases} z^2 & z \neq i \\ 0 & z = i \end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{z \to i} f(z) = -1 \neq f(i) = 0$

la fonction $f(z)$ n'est pas continue en i.

Remarque : $f = u + iv$ continue en $z_0 = x_0 + iy_0$ ssi u et v sont continues en (x_0, y_0).