Chapitre 3

3. Dérivation dans $\mathbb{C}$:

Définition : On dit que $A \subset \mathbb{C}$ est un ouvert (ou ensemble ouvert), si pour tout $z \in A$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\{w \in \mathbb{C} ; |w - z| \leq \varepsilon\} \subset A$

Définition de la dérivée :

Soit $A \subset \mathbb{C}$ un ouvert dans $\mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in A$

La dérivée de la fonction f en z_0 est

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \overset{\text{ou}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

pourvu que cette limite existe.

- Si la limite existe, on dit que f est dérivable en z_0.

Définition (fonction holomorphe) (dans le livre holomorphe $\equiv$ analytique).

- On dit que f est une fonction holomorphe dans un ouvert A, si f est dérivable en tout point z de A.

- Une fonction est dite holomorphe en un point z_0 si elle est holomorphe dans un voisinage $\{|z - z_0| < \delta\}$, $\delta > 0$
- Une fonction f est dite entière si elle dérivable sur tout le plan complexe.

Exemple : 1) Les polynômes sont des fonctions entières

2) La fonction $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3) La fonction $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ n'est pas dérivable en aucun point.

Équations de Cauchy-Riemann :

Soit $A \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f : A \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans A. Alors $f = u + iv$

les parties réelles et imaginaires u et v admettent en tout point de A des dérivées partielles qui satisfont les équations de Cauchy-Rieman

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \; ; \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Réciproquement si les dérivées partielles de u et v sont continues et satisfont les équations de Cauchy-Riemann, alors la fonction $f = u + iv$ est holomorphe dans A.

<u>Lemme :</u> si f est holomorphe dans A, alors

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \forall z \in A$$

<u>Example:</u> $f(z) = z^2$, $f'(z) = 2z$. f est entière

$f(z) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$ $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$

$\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y \end{cases}$

$\longrightarrow \quad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i2y$

Fonctions harmoniques: (dans $\mathbb{R}^2$)

<u>Définition:</u>

Soit Ω un <u>ouvert</u> de $\mathbb{R}^2$. $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ désigne l'opérateur de Laplace sur $\mathbb{R}^2$

- Une fonction u sur Ω est dite <u>harmonique</u> si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et son Laplacien est nul $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0$ sur Ω.

Les équations de Cauchy-Riemann et fonctions harmoniques:

Si les dérivées partielles secondes de u et v par rapport à x et y existent et sont continues dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, alors on peut tirer des équations de C-R

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

i.e. Les parties réelles et imaginaires de $f = u + iv$ sont des fonctions harmoniques.

Preuve:

Les équations de C-R:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{-\partial^2 v}{\partial y \partial x}\end{array}\right. \xrightarrow{\text{somme}} \boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$$

Par les mêmes étapes on obtient $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

Exemple:

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy$$

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0.$$

- Si u est une fonction harmonique sur un ouvert Ω. Alors une fonction v dite harmonique conjuguée de u si u et v verifient les conditions de Cauchy Riemann

---

Règles de Dérivation:

- Les règles du calcul differentiel concernant sommes, différences, produits, quotients et compositions (Lorsqu'elles sont définies) sont encore valable.
- Une fonction dérivable est nécessairement continue.

Dérivées des fonctions élémentaires:

Les dérivées des fonctions élémentaires dans le cas complexe sont identiques à celles dans le cas réel.

Exemple: $\dfrac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$, $\dfrac{d}{dz} a^z = a^z \operatorname{Log} a$, ...

Dérivées d'ordre supérieur:

Si f est holomorphe dans un ouvert A, sa dérivée notée f'. Si f' est holomorphe dans A. Sa dérivée est notée f''. De la même façon on définit les dérivées supérieures.

Théorème: Si f est holomorphe dans un ouvert connexe A, alors $f', f'', \ldots\ldots$ sont également holomorphe dans A. i.e. les dérivées tous ordres existent dans A.

Règle de L'hospital :

Soit f et g deux fonctions holomorphe dans un ouvert connexe contenant z_0 supposons que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ avec $g'(z_0) \neq 0$. Alors

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Dans le cas où $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$, on peut utiliser cette règle à nouveau.

Example : $\lim_{z \to i} \frac{z^6+1}{z^2+1} = \lim_{z \to i} \frac{6z^5}{2z} = 3i^4 = 3$

Points singulier :

Un point en lequel une fonction $f(z)$ cesse d'être holomorphe est appelé un point singulier ou une singularité de f.

Il existe des types variés de singularités.

1. Singularités isolées. le point $z = z_0$ est appelé singularité isolée ou point singulier isolé de f, s'il existe $\delta > 0$ tel que le cercle $|z - z_0| = \delta$ ne contienne pas d'autre point singulier que z_0.

2. Pôles : s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = \ell \neq 0$, alors z_0 est appelé un pôle d'ordre n. si $n = 1$, z_0 est appelé un pôle simple.

   Example : $f(z) = \frac{1}{(z-2)^3}$ a un pôle triple en $z = 2$.

   • Si $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$ où $f(z_0) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $z = z_0$ est appelé un zéro d'ordre n de g. si $n = 1$, on dit que z_0 est un zero simple.

3. singularités apparentes : Le point singulier z_0 est appelé singularité apparente de f si $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe

   Example : $z = 0$ est une singularité apparente de $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ puisque $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$.

4. Points de branchement.

Le point de branchement est point singulier d'une fonction multiforme.

En ce point s'echangent les differentes déterminations.

Example: $f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right)}$, $k = 0, 1$

Le point $z = 0$ est un point de branchement

5. Singularités essentielles:

Une singularité qui n'est ni un pôle, ni un point de branchement, ni une singularité apparente est appelée singularité essentielle.

Example: $f(z) = e^{\frac{1}{z-2}}$ a une singularité essentielle en $z = 2$.