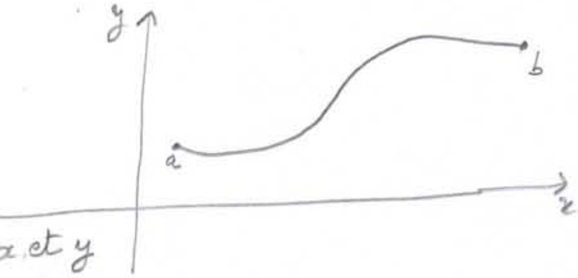
Chapitre 4

Intégration dans le domaine complexe. - Théorème de Cauchy.

Intégrales curvilignes réelles :



Soit C une courbe dans le plan.

Soient $P(x,y)$, $Q(x,y)$ deux fonctions réelles de x et y continues dans tout point de C, l'intégrale curviligne de $P\,dx + Q\,dy$ le long de C est définie par

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \qquad \text{ou simplement} \quad \int_C P\,dx + Q\,dy$$

- Si C est continûment differentiable et $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ où $t_1 \leq t \leq t_2$.

l'integrale précedente est donnée par

$$\int_{t_1}^{t_2} P(\phi(t), \psi(t))\,\phi'(t)\,dt + Q(\phi(t), \psi(t))\,\psi'(t)\,dt$$

Intégrale curviligne complexe :

$z = x + iy$

Si $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, on a : $dz = dx + i\,dy$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u + iv)(dx + i\,dy)$$

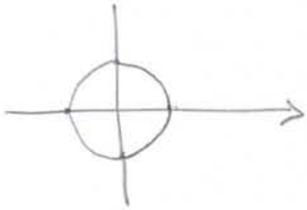
$$= \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy.$$

si $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ $t_1 \leq t \leq t_2$, alors

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} (u\cdot\phi'(t) - v\,\psi'(t))\,dt + i\int_{t_1}^{t_2} (v\,\phi'(t) + u\,\psi'(t))\,dt.$$

Exemple: Soit $C = \left\{ z \,/\, z = e^{it}, \quad t \in [-\pi, \pi] \right\}$

Évaluer l'intégrale $\int_C z^2 \, dz$



$$z(t) = e^{it}, \quad dz = z'(t)\,dt = i\,e^{it}\,dt$$

$$\int_C z^2\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{it}\right)^2 i\,e^{it}\,dt = i\int_{-\pi}^{\pi} e^{3it}\,dt = i\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3t) + i\sin(3t)\,dt$$

$$= i\int_{-\pi}^{\pi}\cos(3t)\,dt - \int_{-\pi}^{\pi}\sin(3t)\,dt = \left[\frac{i}{3}\sin(3t)\right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{-1}{3}\cos(3t)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Properietés des integrales:

Soient f et g deux fonctions intégrables le long C, alors

1. $\int_C f(z) + g(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz$

2. $\int_C \alpha f(z)\,dz = \alpha \int_C f(z)\,dz$ $\quad$ α constante dans $\mathbb{C}$.

3. $\int_a^b f(z)\,dz = -\int_b^a f(z)\,dz$

4. $\int_a^b f(z)\,dz = \int_a^{\alpha} f(z)\,dz + \int_{\alpha}^{b} f(z)\,dz$ $\quad$, a, b, α des points dans la courbe C

(ML Théorème) 5. $\left| \int_C f(z)\,dz \right| \leq ML$ $\quad$ où $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in C$

L designe la longueur de C.

Si la courbe $C = \left\{ z(t),\ t_1 \leq t \leq t_2 \right\}$, alors

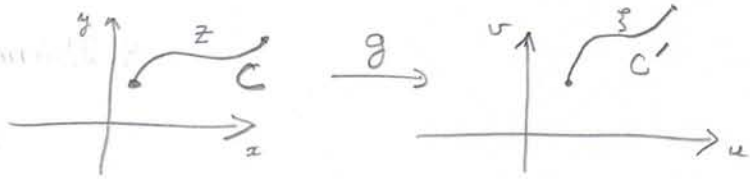
$$L = \int_{t_1}^{t_2} |z'(t)|\,dt.$$

Plus généralement: $\left| \int_C f(z)\,dz \right| \leq \int_C |f(z)| \cdot |dz|$

Changements de Variables :

. Soit $z = g(\xi)$ une fonction continûment dérivable de la variable $\xi = u + iv$

. Supposons qu'une $g(C) = C'$



Alors :

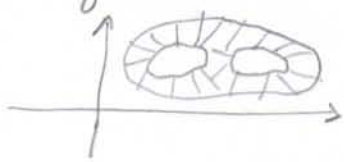
$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C'} f(g(\xi))\, g'(\xi)\, d\xi .$$

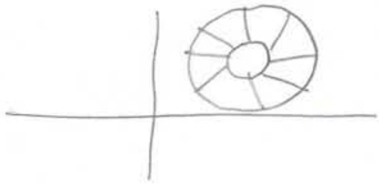
Ouverts simplement ou multiplement connexes :

- Un ensemble S dans $\mathbb{C}$ est connexe, si pour tous 2 points de S peuvent être liés par une courbe linéaire par morceaux contenant dans S.

- Un ouvert connexe Ω est dit simplement connexe si toute courbe fermée peut être réduite à un point sans quitter Ω.

Dans le cas contraire Ω est dit multiplement connexe





Formule de Green :

Soit $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ dans $C^1(\bar{\Omega})$, Ω ouvert connexe dans $\mathbb{R}^2$.
C est la frontière de Ω.

La formule de Green établit que

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Cette formule est vraie pour les ouverts simplement connexes ou multiplement connexes.

<u>Exemple</u> : C = cercle de centre 0 et de rayon 1 $\to$ Ω = Disque de centre 0 et rayon 1.

$$\int_C z^2 dz = \int_C (x+iy)^2 (dx + i\,dy) = \int_C (x^2 - y^2)\,dx - 2xy\,dy + i \int_C 2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$$

$$= \iint_D (-2y + 2y)\,dx\,dy + i \iint_D (2x - 2x)\,dx\,dy = 0 .$$

Théorème de Cauchy:

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω et sa frontière C.

Alors
$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

Ce théorème est valable pour des ouverts simplement connexes ou multiplements connexes.

Théorème de Morera: (Réciproque du théorème de Cauchy)

Soit f une fonction continue dans un ouvert simplement connexe Ω.

Supposons que $\oint_C f(z)\,dz = 0$ pour toute courbe fermée simple de Ω.

Alors f est holomorphe dans Ω.

Exemple: Soit $C = \{ z \,/\, z = e^{it} \,,\; t \in [-\pi, \pi] \}$

Calculer $\oint_C 2z\,dz$

$$z = e^{it} \rightarrow dz = i e^{it}\,dt$$

$$\oint_C 2z\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} 2e^{it}.\,ie^{it}\,dt = 2i\int_{-\pi}^{\pi} e^{2it}\,dt = \left[e^{2it} \right]_{-\pi}^{\pi} = 1-1 = 0$$

Intégrales indefinies: (Primitives)

Si f et F sont holomorphes dans un ouvert connexe Ω et telles que $F'(z) = f(z)$,

alors $F(z) = \int f(z)\,dz$ est appelée intégrale indéfinie de f

Exemple: $\frac{d}{dz}\left(3z^2 - 4\sin z\right) = 6z - 4\cos z$

$$\rightarrow \int 6z - 4\cos z\,dz = 3z^2 - 4\sin z + C$$

Quelques consequences du théorème de Cauchy :

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert simplement connexe Ω. On a alors les théorèmes suivants :

Théorème 1 :

Si a et z sont deux points de Ω, alors $\int_a^z f(w)\,dw$ est independant du chemin suivi pour aller de a à z.

théorème 2 :

Si a et z deux points de Ω et si $G(z) = \int_a^z f(w)\,dw$, alors $G(z)$ est holomorphe dans Ω et $G'(z) = f(z)$.

théorème 3 :

si a et b sont deux points quelconque de Ω et si $F'(z) = f(z)$, alors

$$\int_a^b f(z)\,dz = F(z)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple : $\displaystyle\int_{3i}^{1-i} 4z\,dz = 2z^2\Big|_{3i}^{1-i} = 2(1-i)^2 - 2(3i)^2 = 18 - 4i$

théorème :

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe limité par deux courbes fermées simples C_1 et C_2. Alors :

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$