

Chapitre 5 Théorème de Cauchy - Formules intégrales de Cauchy

Théorème de Cauchy : Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω et sur sa frontière C . Alors

$$\boxed{\phantom{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}}$$

Ce théorème fondamental est souvent appelé théorème de Cauchy, il est à la fois valable pour des ouverts simplement connexes ou multiple ment connexes.

Théorème de Morera : (réciproque du théorème de Cauchy)

Soit f une fonction continue dans un ouvert simplement connexe Ω , supposons que

$$\boxed{\int_C f(z) dz = 0}$$

pour toute courbe fermée simple de Ω . Alors $\boxed{\phantom{f \text{ est holomorphe dans } \Omega}}$ dans Ω .

Exemple :

Intégrales indéfinies : (Primitives)

Si $f(z)$ et $F(z)$ sont holomorphes dans un ouvert connexe Ω et telles que $\boxed{}$,

alors $\boxed{\phantom{F(z) \text{ est l'intégrale indéfinie de } f(z)}}$ est appelée intégrale indéfinie ou anti-dérivée de $\boxed{}$ et est notée

$$\boxed{}$$

Exemple :

Quelques conséquences du théorème de Cauchy :

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert simplement connexe Ω . On a alors les théorèmes suivants.

Théorème 1 :

Si a et z sont deux points quelconques de Ω , alors est indépendant du chemin suivi pour aller de a à z .

Théorème 2 :

Si a et z sont deux points quelconques de Ω et si , alors $G(z)$ est holomorphe dans Ω et .

Théorème 3 :

Si a et b sont deux points quelconques de Ω et si , alors .

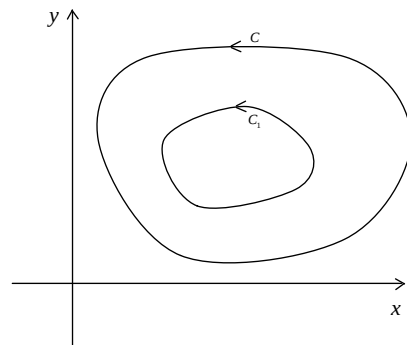
Exemple :

Théorème 4 :

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe limité par deux courbes fermées simples C et C_1 et sur ces courbes. Alors

.

où C et C_1 sont décrites dans le sens positif relatif à leur intérieur.



Formule intégrale de Cauchy

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , soit a un point intérieur à C , alors

(1)

où le contour C est décrit dans le sens direct.

De même la n -ième dérivée de f en $z = a$ est donnée par

(2)

- Les résultats (1) et (2) sont appelés formules intégrales de Cauchy et sont très remarquables car ils montrent que si une fonction f est connue sur la courbe fermée simple C , alors ses valeurs et les valeurs de toutes ses dérivées peuvent être calculées en tout point situé à l'intérieur de C .

Quelques théorèmes importants :

La liste suivante contient quelques théorèmes importants qui sont des conséquences des formules intégrales de Cauchy.

1. Théorème de Morera (réciproque du théorème de Cauchy).

Si f est continue dans un ouvert simplement connexe Ω et si sur toute courbe fermée simple de Ω , alors f est holomorphe dans Ω .

2. Inégalité de Cauchy

Si f est holomorphe à l'intérieur du cercle C et sur C , où C désigne le cercle d'équation $|z - a| = r$, alors

M désignant une constante telle que $|f(z)| < M$ sur C , i.e. M est une borne supérieure de $|f(z)|$ sur C .

3. Théorème de Liouville

Supposons que quel que soit z dans le plan complexe

(a) f est holomorphe (b) f est bornée, i.e. $|f(z)| < M$, où M désigne une constante.

Alors

4. Théorème fondamental de l'algèbre

Toute équation algébrique

possède exactement n racines, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité.

5. Théorème de Gauss sur la valeur moyenne

Si f est holomorphe à l'intérieur du cercle C d'équation $|z - a| = r$ et sur C , alors $f(a)$ est la moyenne des valeurs de $f(z)$ sur C , i.e.

6. Théorème du module maximum

Si f est holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C , et sur C , si de plus f n'est pas constante alors le maximum de

est atteint sur C .

7. Théorème du module minimum

Si f est une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C , et sur C , si de plus $f(z) \neq 0$ à l'intérieur de C alors

atteint son minimum sur C .

8. Théorème de l'argument

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C , et sur C , à l'exception d'un nombre fini de pôles intérieurs à C . On a alors

où N et P désignent respectivement le nombre de zéros et le nombre de pôles de $f(z)$ intérieurs à C .

9. Théorème de Rouché

Si f et g sont holomorphes dans et sur une courbe fermée simple C , et si $|g(z)| < |f(z)|$ sur C , alors

ont le même nombre de zéros à l'intérieur de C .