

Chapitre 5 Théorème de Cauchy - Formules intégrales de Cauchy

Théorème de Cauchy : Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω et sur sa frontière C . Alors

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Ce théorème fondamental est souvent appelé théorème de Cauchy, il est à la fois valable pour des ouverts simplement connexes ou multiple ment connexes.

Théorème de Morera : (réciproque du théorème de Cauchy)

Soit f une fonction continue dans un ouvert simplement connexe Ω , supposons que

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

pour toute courbe fermée simple de Ω . Alors f est holomorphe dans Ω .

Exemple :

Soit $C = \{z / z = e^{it}, t \in [-\pi, \pi]\}$. Calculer $\oint_C 2z dz$.

On a $dz = d(e^{it}) = ie^{it} dt$, alors

$$\oint_C 2z dz = \int_{-\pi}^{\pi} 2e^{it} (ie^{it} dt) = 2i \int_{-\pi}^{\pi} e^{2it} dt = [e^{2it}]_{-\pi}^{\pi} = 1 - 1 = 0.$$

Intégrales indéfinies : (Primitives)

Si $f(z)$ et $F(z)$ sont holomorphes dans un ouvert connexe Ω et telles que $F'(z) = f(z)$,

alors $F(z)$ est appelée intégrale indéfinie ou anti-dérivée de $f(z)$ et est notée

$$F(z) = \int f(z) dz.$$

Exemple : On a $\frac{d}{dt} (3z^2 - 4 \sin z) = 6z - 4 \cos z$, alors

$$\int (6z - 4 \cos z) dz = 3z^2 - 4 \sin z + C, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Quelques conséquences du théorème de Cauchy :

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert simplement connexe Ω . On a alors les théorèmes suivants.

Théorème 1 :

Si a et z sont deux points quelconques de Ω , alors $\int_a^z f(w) dw$ est indépendant du chemin suivi pour aller de a à z .

Théorème 2 :

Si a et z sont deux points quelconques de Ω et si $G(z) = \int_a^z f(w) dw$, alors $G(z)$ est holomorphe dans Ω et $G'(z) = f(z)$.

Théorème 3 :

Si a et b sont deux points quelconques de Ω et si $F'(z) = f(z)$, alors

$$\int_a^b f(z) dz = [F(z)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple : Calculer $\int_{3i}^{1-i} 4z dz$.

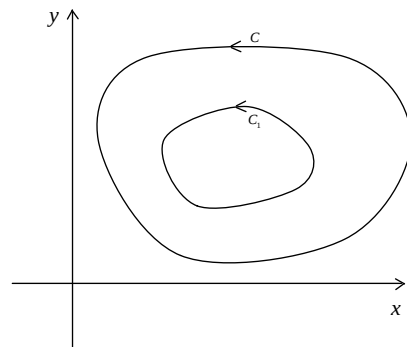
$$\int_{3i}^{1-i} 4z dz = [2z^2]_{3i}^{1-i} = 2(1-i)^2 - 2(3i)^2 = 18 - 4i.$$

Théorème 4 :

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe limité par deux courbes fermées simples C et C_1 et sur ces courbes. Alors

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz.$$

où C et C_1 sont décrites dans le sens positif relatif à leur intérieur.



Formule intégrale de Cauchy

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , soit a un point intérieur à C , alors

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (1)$$

où le contour C est décrit dans le sens direct.

De même la n -ième dérivée de f en $z = a$ est donnée par

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

- Les résultats (1) et (2) sont appelés formules intégrales de Cauchy et sont très remarquables car ils montrent que si une fonction f est connue sur la courbe fermée simple C , alors ses valeurs et les valeurs de toutes ses dérivées peuvent être calculées en tout point situé à l'intérieur de C .

Quelques théorèmes importants :

La liste suivante contient quelques théorèmes importants qui sont des conséquences des formules intégrales de Cauchy.

1. Théorème de Morera (réciproque du théorème de Cauchy).

Si f est continue dans un ouvert simplement connexe Ω et si $\oint_C f(z) dz = 0$ sur toute courbe fermée simple de Ω , alors f est holomorphe dans Ω .

2. Inégalité de Cauchy

Si f est holomorphe à l'intérieur du cercle C et sur C , où C désigne le cercle d'équation $|z-a| = r$, alors

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{Mn!}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

M désignant une constante telle que $|f(z)| < M$ sur C , i.e. M est une borne supérieure de $|f(z)|$ sur C .

3. Théorème de Liouville

Supposons que quel que soit z dans le plan complexe

(a) f est holomorphe (b) f est bornée, i.e. $|f(z)| < M$, où M désigne une constante.

Alors f est constante.

4. Théorème fondamental de l'algèbre

Toute équation algébrique $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n, \quad a_n \neq 0,$

possède exactement n racines, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité.

5. Théorème de Gauss sur la valeur moyenne

Si f est holomorphe à l'intérieur du cercle C d'équation $|z - a| = r$ et sur C , alors $f(a)$ est la moyenne des valeurs de $f(z)$ sur C , i.e.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

6. Théorème du module maximum

Si f est holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C , et sur C , si de plus f n'est pas constante alors le maximum de $|f(z)|$ est atteint sur C .

7. Théorème du module minimum

Si f est une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C , et sur C , si de plus $f(z) \neq 0$ à l'intérieur de C alors $|f(z)|$ atteint son minimum sur C .

8. Théorème de l'argument

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C , et sur C , à l'exception d'un nombre fini de pôles intérieurs à C . On a alors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$$

où N et P désignent respectivement le nombre de zéros et le nombre de pôles de $f(z)$ intérieurs à C .

9. Théorème de Rouché

Si f et g sont holomorphes dans et sur une courbe fermée simple C , et si $|g(z)| < |f(z)|$ sur C ,

alors $f(z) + g(z)$ et $f(z)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de C .