Chapitre 6 Séries infinies, séries de Taylor, séries de Laurent

Séries de fonctions

À partir d'une suite de fonctions $\{u_n(z)\}$, nous formons une nouvelle suite $\{S_n(z)\}$ définie par

$$S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z)$$

où $S_n(z)$ appelée la $n^{ième}$ somme partielle est la somme des n premiers termes de la suite $\{u_n(z)\}$. La suite $S_n(z)$ est représentée par

$$\boxed{u_1(z) + u_2(z) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)}$$

appelée série infinie. Si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$, la série est dite $\boxed{\text{convergente}}$ et $S(z)$ est sa somme ; dans le cas contraire la série est dite $\boxed{\text{divergente}}$.

Théorème : Une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n)$ converge, a_n et b_n étant réels, est que $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n}$ et $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n}$ convergent.

Convergence absolue. Une série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ est dite absolument convergente si la série des valeurs absolues, i.e. $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|}$, converge.

Théorème : Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ converge alors $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)}$ converge. Autrement dit une série absolument convergente est $\boxed{\text{convergente}}$.

Séries entières

Une série de la forme

$$\boxed{a_0 + a_1(z-a) + a_1(z-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n} \qquad (1)$$

est appelée série entière en $z - a$.

Rayon de convergence. Il existe un nombre positif R tel que (1) converge pour $\boxed{|z-a|<R}$ et diverge pour $\boxed{|z-a|>R}$, cependant que pour $\boxed{|z-a|=R}$ elle peut ou non converger.

Géométriquement si Γ est le cercle de rayon R centré en $z=a$, alors la série (1) converge en tous $\boxed{\text{les points intérieurs}}$ à Γ et diverge en tous $\boxed{\text{les points extérieurs}}$; elle peut ou non converger $\boxed{\text{sur le cercle}}$ Γ.

Les valeurs spéciales $\boxed{R=0 \text{ et } R=\infty}$ correspondent aux cas où (1) converge uniquement en $\boxed{z=a}$ ou converge pour toute valeur (finie) de z.

Le nombre R est souvent appelé $\boxed{\text{le rayon de convergence}}$ de (1) et le cercle $|z-a|=R$ est appelé $\boxed{\text{le cercle de convergence.}}$

Théorème : Nous pouvons obtenir le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ par

$$\text{critère de d'Alembert : } \boxed{R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|},$$

ou par

$$\text{critère de Cauchy : } \boxed{R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}},$$

si les limites existent.

Exemple : Trouver les rayons de convergence pour les séries suivantes.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $a_n = 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1}\right|=1.$$

La série converge pour $|z|<1$ et diverge pour $|z|\geq 1$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $a_n=\frac{1}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right|=1.$$

La série converge dans $|z| < 1$ et diverge en dehors i.e. $|z| > 1$. Sur le cercle $|z| = 1$, la série converge en certains points et diverge en d'autres points.

Théorème :

a) Une série entière peut être $\boxed{\text{dérivée}}$ terme à terme dans tout ouvert connexe situé à l'intérieur du cercle de convergence.

b) Une série entière peut être $\boxed{\text{intégrée}}$ terme à terme sur toute courbe C située entièrement à l'intérieur du cercle de convergence.

Séries de Taylor

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C. Alors

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \ldots},$$

ou en posant . $z = a + h, \quad h = z - a,$

$$\boxed{f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots}.$$

Ceci est appelé le théorème de Taylor et les séries précédentes sont appelées séries de Taylor ou développement de Taylor de $f(a+h)$ ou $f(z)$.

Le domaine de convergence de la dernière série est défini par $\boxed{|z-a| < R}$, le rayon de convergence R étant égal à la distance de a à la singularité de $f(z)$ la plus proche.

Sur $\boxed{|z-a| = R}$ la série peut ou non converger.

Pour $\boxed{|z-a| > R}$ la série diverge.

Si la singularité la plus proche est à l'infini, le rayon de convergence $\boxed{R = \infty}$, i.e. la série converge quel que soit z.

Quelques séries particulières. La liste qui suit contient quelques séries particulières avec leurs domaines de convergence.

1. $\boxed{e^z} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \qquad |z| < \infty.$

2. $\boxed{\sin z} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad |z| < \infty.$

3. $\boxed{\cos z} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots \qquad |z| < \infty.$

4. $\boxed{\operatorname{Log} z} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \dots \qquad |z| < 1.$

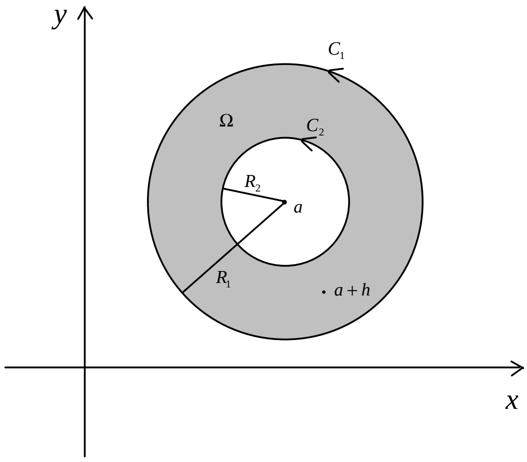
5. $\boxed{\operatorname{Arctg} z} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1} + \dots \qquad |z| < 1.$

6. $\boxed{(1+z)^p} = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2!}z^2 + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!}z^n + \dots \qquad |z| < 1.$

Si $(1+z)^p$ est multiforme le résultat est valable pour la branche de la fonction qui prend la valeur 1 pour $z = 0$.

Séries de Laurent

Soit C_1 et C_2 des cercles concentriques, de centre a et de rayons respectifs R_1 et R_2, voir figure ci-contre. On suppose que f est uniforme et $\boxed{\text{holomorphe}}$ sur C_1 et C_2 et également dans la couronne Ω [ou région annulaire Ω] limitée par C_1 et C_2 et ombrée dans la figure ci-contre. Les courbes C_1 et C_2 étant décrits dans le sens positif par rapport à leurs intérieurs.



Soit $a + h$ un point quelconque de Ω, on a alors

$$\boxed{\begin{aligned} f(a+h) = a_0 \ &+ a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \dots \\ &+ \frac{a_{-1}}{h} + \frac{a_{-2}}{h^2} + \frac{a_{-3}}{h^3} + \dots \end{aligned}}$$

où

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \qquad n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots}$$

et $C = C_1$ ou C_2. Avec le changement de notation $z = a + h$, on peut écrire

$$\boxed{\begin{aligned} f(z) = a_0 \ &+ a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + a_3(z-a)^3 + \dots \\ &+ \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{a_{-3}}{(z-a)^3} + \dots \end{aligned}} \tag{2}$$

Ceci est appelé le théorème de Laurent et la formule ci-dessus est appelée une série de Laurent ou un développement de Laurent.

La partie $a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + a_3(z-a)^3 + \dots$ est appelée la partie $\boxed{\text{analytique}}$ de la série de Laurent cependant que le reste de la série formé des puissances négatives de $z - a$

est appelé la partie $\boxed{\text{principale}}$. Si la partie $\boxed{\text{principale}}$ est nulle, la série de Laurent se réduit à une série de Taylor.

Exemple : Déterminer le développement en série de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3}\right)$$

dans la couronne $\Omega = \left\{\frac{3}{2} < |z| < \frac{5}{2}\right\}$.

Si $|z| > \dfrac{3}{2}$, on a

$$\boxed{\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right) = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \dots}$$

Si $|z| < \dfrac{5}{2}$, on a

$$\boxed{\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{z}{9} + \frac{z^2}{27} - \dots}$$

Alors dans la couronne $\left\{\frac{3}{2} < |z| < \frac{5}{2}\right\}$ on a

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3}\right) = \dots - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{18} - \frac{z^2}{54} - \dots.}$$

Classification des singularités. Il est possible de classer les singularités d'une fonction f par l'examen de sa série de Laurent. Dans ce but nous supposerons dans la figure ci-dessus que $R_2 = 0$ si bien que f est $\boxed{\text{holomorphe}}$ à l'intérieur de C_1 et sur C_1 excepté en $z = a$ qui est une $\boxed{\text{singularité isolée}}$.

1. Pôles. Si f à la forme (2) dans laquelle la partie principale ne possède qu'un nombre fini de termes donnés par

$$\boxed{\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{a_{-3}}{(z-a)^3} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}}$$

où $a_{-n} \neq 0$, alors $z = a$ est appelé un $\boxed{\text{pôle d'ordre } n}$.

Si $n = 1$ on a affaire à un $\boxed{\text{pôle simple}}$.

Si $z = a$ est un pôle de f alors $\boxed{\lim_{z\to a} f(z) = \infty}$.

2. Singularités apparentes. Si une fonction uniforme f n'est pas définie en $z=a$ mais si $\boxed{\lim_{z\to a} f(z)}$ existe, alors $z=a$ est appelée une $\boxed{\text{singularité apparente}}$. Dans un pareil cas on définit $f(z)$ pour $z=a$ comme étant égal à $\lim_{z\to a} f(z)$.

Exemple : Si $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ alors $z=0$ est une singularité apparente car $f(0)$ n'est pas défini mais $\lim_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$. On définit $f(0)=\lim_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$. On remarque que dans ce cas

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left\{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots\right\}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\ldots$$

3. Singularités essentielles. Si f est uniforme alors toute singularité qui n'est ni un pôle ni une singularité apparente est appelée une $\boxed{\text{singularité essentielle}}$. Si $z=a$ est une singularité essentielle de $f(z)$, la partie principale du développement de Laurent possède une $\boxed{\text{infinité de termes}}$.

Exemple : Le développement de $e^{\frac{1}{z}}$ s'écrivant

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots,$$

on en déduit que $z=0$ est une singularité essentielle.

4. Singularités à l'infini. En posant $z=\dfrac{1}{w}$ dans $f(z)$ on obtient la fonction $f\left(\dfrac{1}{w}\right)=F(w)$. Alors la nature de la singularité à $z=\infty$ [le point à l'infini] est définie comme étant la même que celle de $\boxed{F(w) \text{ en } w=0}$.

Exemple :

a) La fonction $f(z)=z^3$ a un pôle triple en $z=\infty$ car $F(w)=f\left(\dfrac{1}{w}\right)=\dfrac{1}{w^3}$ possède un pôle triple en $z=0$.

b) De la même façon $f(z)=e^z$ possède une singularité essentielle en $z=\infty$ car $F(w)=f\left(\dfrac{1}{w}\right)=e^{\frac{1}{w}}$ a une singularité essentielle en $w=0$.