U.S.T.H.B. 2012-2013 Semestre 2 | **Math 4 : Analyse complexe**
Faculté de Mathématiques | **2ème Lic, ST-GP, Section G**

Examen final - 03 juin 2013. Durée : 1 heure 30 minutes

Nom :.. **Matricule :**..

Prénom :.. **Groupe :**..

==

Exercice 1 (4 points) : Posons $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $w = z + z^2$.

a) Donner une expression simple de w sous forme algébrique.

b) Calculer $\mathrm{Log}(z)$ et $\mathrm{Log}(w)$ dans le cas de la détermination principale ($\arg z \in [0, 2\pi[$).

c) En déduire $\mathrm{Log}\Big(1 - \dfrac{z}{w}\Big)$. *Indication :* Noter que $w - z = z^2$.

Réponse.

==

Exercice 2 (5 points) :

a) Montrer que la fonction $u = x^2 - y^2 + e^x \cos y$ est harmonique.

b) Trouver une fonction v telle que $f(z) = u + iv$ soit holomorphe.

c) Exprimer $f(z)$ à l'aide de la variable z.

Réponse.

==

<u>Exercice 3 (5,5 points)</u> :

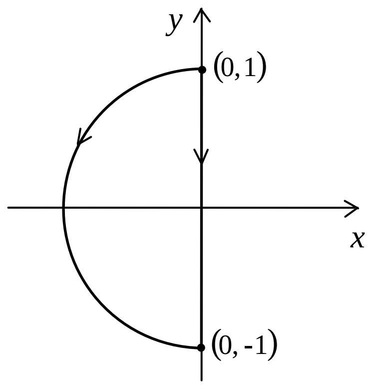
a) Calculer $\oint_C (3z^2 + \overline{z})\, dz$ le long

1. du cercle $|z| = 1$ de $(0, 1)$ à $(0, -1)$ dans le sens direct,

2. du segment de droite joignant $(0, 1)$ et $(0, -1)$.

b) Expliquer pourquoi ces deux intégrales sont différentes.

Réponse.



==

<u>Exercice 4 (5,5 points)</u> : On considère la fonction $f(z) = \dfrac{-z}{(z-2)(z-3)}$.

a) Trouver les résidus de $f(z)$ en tous les pôles.

b) Par application de la formule intégrale de Cauchy, calculer $\displaystyle\oint_C \frac{-z}{(z-2)(z-3)}dz$ où C désigne le cercle $|z| = 4$ dans le sens direct. <u>*Indication*</u> *:* $\dfrac{-z}{(z-2)(z-3)} = \dfrac{2}{z-2} + \dfrac{-3}{z-3}$.

c) Déterminer le développement en série de Laurent de $f(z)$ au voisinage de $z = 2$.

Réponse.