U.S.T.H.B. 2012-2013 Semestre 2 — **Math 4 : Analyse complexe**

Faculté de Mathématiques — **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section G**

Examen de Rattrapage - 24 juin 2013. Durée : 1 heure 30 minutes

Nom :.. **Prénom :**..

Matricule :.. **Groupe :**..

===

Exercice 1 (4 points) :

a) Calculer $\mathrm{Log}(1+i)$ et $\mathrm{Log}(-i)$.

b) Résoudre l'équation $e^{2z} - e^{z} + 1 - i = 0$. **Indication.** Noter que $(1+2i)^2 = -3+4i$.

Réponse.

==

<u>**Exercice 2 (5 points)**</u> **:** On considère la fonction $f(z) = z + e^{z^2}$.

a) Écrire la fonction f sous forme $u(x, y) + iv(x, y)$.

b) En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, montrer que f est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

c) En déduire les parties réelles et imaginaires de $g(z) = 1 + 2ze^{z^2}$.

Réponse.

==

Exercice 3 (5,5 points) :

a) Par application de la formule intégrale de Cauchy, calculer $\oint\limits_C \frac{1}{z+2+\sqrt{3}}dz$ et $\oint\limits_C \frac{1}{z+2-\sqrt{3}}dz$ où C désigne le cercle $|z| = 1$ dans le sens direct.

b) En déduire $\oint\limits_C \frac{1}{z^2+4z+1}dz$. **Indication.** Noter que $\frac{2\sqrt{3}}{z^2+4z+1} = \frac{1}{z+2-\sqrt{3}} - \frac{1}{z+2+\sqrt{3}}$.

c) En utilisant la paramétrisation $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ du cercle C, vérifier que

$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}dt = \oint\limits_C \frac{a}{z^2+4z+1}dz$ où a est une constante à déterminer.

d) En déduire $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}dt$.

Réponse.

==

Exercice 4 (5,5 points) : On considère la fonction $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z-2)(z-3)}$.

a) Trouver les résidus de $f(z)$ en tous les pôles.

b) Par application de la formule intégrale de Cauchy, calculer $\oint\limits_C f(z)\,dz$ où C désigne le cercle $|z| = 4$ dans le sens direct. **Indication.** $\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}$.

c) Déterminer le développement en série de Laurent de $f(z)$ au voisinage de $z = 3$.

Indication. $\frac{z^2+1}{(z-2)(z-3)} = 1 + \frac{10}{z-3} - \frac{5}{z-2}$.

Réponse.