U.S.T.H.B. 2012-2013 Semestre 2
Faculté de Mathématiques

Math 4 : Analyse complexe
$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section G

Examen de Rattrapage - 24 juin 2013. Durée : 1 heure 30 minutes

Nom :.. **Prénom :**..

Matricule :.. **Groupe :**..

==

Exercice 1 (4 points) :

a) Calculer $\operatorname{Log}(1+i)$ et $\operatorname{Log}(-i)$.

b) Résoudre l'équation $e^{2z} - e^{z} + 1 - i = 0$. **Indication.** Noter que $(1+2i)^2 = -3+4i$.

Réponse.

a) $\cdot \operatorname{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i\operatorname{Arg}(1+i)$ (0,5 pt.)

$$= \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}. \text{ (0,5 pt.)}$$

$\cdot \operatorname{Log}(-i) = \ln|-i| + i\operatorname{Arg}(-i)$ (0,5 pt.)

$$= \ln 1 + i\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}. \text{ (0,5 pt.)}$$

b) Si on pose $w = e^{z}$, l'équation à résoudre devienne $w^2 - w + 1 - i = 0$ et donc

$$w = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1-i)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3+4i}}{2} = \frac{1 \pm (1+2i)}{2} = 1+i \text{ ou } -i. \text{ (1 pt.)}$$

On obtient alors $z = \operatorname{Log}(w) = \operatorname{Log}(1+i)$ ou $z = \operatorname{Log}(-i)$, et donc

$$z = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}. \text{ (0,5 pt.)}$$

ou

$$z = i\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}. \text{ (0,5 pt.)}$$

==

Exercice 2 (5 points) : On considère la fonction $f(z) = z + e^{z^2}$.

a) Écrire la fonction f sous forme $u(x,y) + iv(x,y)$.

b) En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, montrer que f est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

c) En déduire les parties réelles et imaginaires de $g(z) = 1 + 2ze^{z^2}$.

Réponse.

a) On a

$$\begin{aligned} z + e^{z^2} &= (x+iy) + e^{(x+iy)^2} = (x+iy) + e^{x^2-y^2+2ixy} \quad \texttt{(0,5 pt.)} \\ &= x + iy + e^{x^2-y^2}(\cos(2xy) + i\sin(2xy)) \quad \texttt{(0,5 pt.)} \\ &= x + e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + i\left(y + e^{x^2-y^2}\sin(2xy)\right). \end{aligned}$$

Alors

$$u(x,y) = x + e^{x^2-y^2}\cos(2xy) \quad \texttt{(0,5 pt.)}$$

et

$$v(x,y) = y + e^{x^2-y^2}\sin(2xy). \quad \texttt{(0,5 pt.)}$$

b) Si les dérivées partielles sont continues dans le domaine indiqué, les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ sont nécessaires et suffisantes pour que $f = u + iv$ soit holomorphe.
On a $u = x + e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ et $v = y + e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 1 + 2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy) - 2ye^{x^2-y^2}\sin(2xy) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 1 - 2ye^{x^2-y^2}\sin(2xy) + 2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy) \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad \texttt{(0,75 pt.)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= -2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy) - 2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy) \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy) + 2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy) \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad \texttt{(0,75 pt.)}$$

Les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites, la fonction f est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$.`(0,5pt.)`

c) On a $g(z) = 1 + 2ze^{z^2} = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

Alors

$$\operatorname{Re}(g(z)) = \frac{\partial u}{\partial x} = 1 + 2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy) - 2ye^{x^2-y^2}\sin(2xy), \quad \texttt{(0,5 pt.)}$$

et

$$\operatorname{Im}(g(z)) = \frac{\partial v}{\partial x} = 2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy) + 2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy). \quad \texttt{(0,5 pt.)}$$

==

<u>Exercice 3 (5,5 points)</u> :

a) Par application de la formule intégrale de Cauchy, calculer $\oint\limits_C \frac{1}{z+2+\sqrt{3}}dz$ et $\oint\limits_C \frac{1}{z+2-\sqrt{3}}dz$ où C désigne le cercle $|z|=1$ dans le sens direct.

b) En déduire $\oint\limits_C \frac{1}{z^2+4z+1}dz$. **Indication.** Noter que $\frac{2\sqrt{3}}{z^2+4z+1} = \frac{1}{z+2-\sqrt{3}} - \frac{1}{z+2+\sqrt{3}}$.

c) En utilisant la paramétrisation $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ du cercle C, vérifier que

$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}dt = \oint\limits_C \frac{a}{z^2+4z+1}dz$ où a est une constante à déterminer.

d) En déduire $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}dt$.

Réponse.

a) Seul $\left(-2+\sqrt{3}\right)$ est à l'intérieur de C, car

$$\left|-2+\sqrt{3}\right| = 2-\sqrt{3} < 1 \text{ et } \left|-2-\sqrt{3}\right| = 2+\sqrt{3} > 1. \text{ (1 pt.)}$$

Alors, l'application de la formule de Cauchy pour $z_0 = -2+\sqrt{3}$ et $z_0 = -2-\sqrt{3}$ avec $f(z) = 1$ donne

$$\oint\limits_C \frac{1}{z+2+\sqrt{3}}dz = 0 \text{ et } \oint\limits_C \frac{1}{z+2-\sqrt{3}}dz = 2\pi i. \text{ (1 pt.)}$$

b) On a $\frac{1}{z^2+4z+1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{z+2-\sqrt{3}} - \frac{1}{z+2+\sqrt{3}}\right)$.

Alors

$$\oint\limits_C \frac{1}{z^2+4z+1}dz = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\oint\limits_C \frac{1}{z+2-\sqrt{3}}dz - \oint\limits_C \frac{1}{z+2+\sqrt{3}}dz\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2\pi i - 0) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}i. \text{ (1 pt.)}$$

c) On pose $z = e^{it}$. D'où $\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2}$, $dz = ie^{it}dz = izdt$ (0,5 pt.) et donc

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}dt = \oint\limits_C \frac{1}{2+\frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = \oint\limits_C \frac{-2i}{z^2+4z+1}dz. \text{ (1 pt.)}$$

d) On a

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}dt = \oint\limits_C \frac{-2i}{z^2+4z+1}dz = (-2i)\frac{\pi}{\sqrt{3}}i = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \text{ (1 pt.)}$$

==

Exercice 4 (5,5 points) : On considère la fonction $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z-2)(z-3)}$.

a) Trouver les résidus de $f(z)$ en tous les pôles.

b) Par application de la formule intégrale de Cauchy, calculer $\oint_C f(z)\,dz$ où C désigne le cercle $|z| = 4$ dans le sens direct. **Indication.** $\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}$.

c) Déterminer le développement en série de Laurent de $f(z)$ au voisinage de $z = 3$.

Indication. $\frac{z^2+1}{(z-2)(z-3)} = 1 + \frac{10}{z-3} - \frac{5}{z-2}$.

Réponse.

a) La fonction $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z-3)(z-2)}$ possède deux pôles simples en $z = 2$ et $z = 3$. (0,5 pt.)

Le résidu en $z = 2$ est

$$\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z^2+1}{(z-2)(z-3)} = \lim_{z\to 2}\frac{z^2+1}{z-3} = \frac{2^2+1}{2-3} = -5. \text{ (0,5 pt.)}$$

Le résidu en $z = 3$ est

$$\lim_{z\to 3}(z-3)\frac{z^2+1}{(z-2)(z-3)} = \lim_{z\to 3}\frac{z^2+1}{z-2} = \frac{3^2+1}{3-2} = 10. \text{ (0,5 pt.)}$$

b) De $\dfrac{1}{(z-2)(z-3)} = \dfrac{1}{z-3} - \dfrac{1}{z-2}$, on tire

$$\oint_C \frac{z^2+1}{(z-2)(z-3)}dz = \oint_C \frac{z^2+1}{z-3}dz - \oint_C \frac{z^2+1}{z-2}dz. \text{ (0,5 pt.)}$$

L'application de la formule de Cauchy pour $a = 2$ et $a = 3$ avec $f(z) = z^2 + 1$ donne

$$\oint_C \frac{z^2+1}{z-3}dz = 2\pi i\left(3^2+1\right) = 20\pi i, \text{ (0,5 pt.) } \quad \oint_C \frac{z^2+1}{z-2}dz = 2\pi i\left(2^2+1\right) = 10\pi i, \text{ (0,5 pt.)}$$

car $z = 2$ et $z = 3$ sont à l'intérieur de C.

L'intégrale considérée vaut donc $20\pi i - 10\pi i = 10\pi i$. (0,5 pt.)

c) Soit $z - 3 = u$. D'où

$$\begin{aligned}
\frac{z^2+1}{(z-2)(z-3)} &= 1 + \frac{10}{z-3} - \frac{5}{z-2} = 1 + \frac{10}{u} - \frac{5}{1+u} \text{ (0,5 pt.)}\\
&= 1 + \frac{10}{u} - 5\left(1 - u + u^2 - u^3 + \ldots\right) \text{ (0,5 pt.)}\\
&= \frac{10}{u} - 4 + 5u - 5u^2 + 5u^3 - \ldots \text{ (0,5 pt.)}\\
&= \frac{10}{z-3} - 4 + 5(z-3) - 5(z-3)^2 + 5(z-3)^3 - \ldots. \text{ (0,5 pt.)}
\end{aligned}$$