

Série d'exercices N° 2 : Fonctions élémentaires

Exercice 1 : Séparer les parties réelles et imaginaires des fonctions suivantes :

a) $f(z) = e^{-z}$, **b)** $f(z) = \sin z$, **c)** $f(z) = 2^{z^2}$, **d)** $f(z) = \operatorname{ch}(z - i)$, **e)** $f(z) = z^{2-i}$.

Solution. **a)** $f(z) = e^{-z} = e^{-(x+iy)} = e^{-x}e^{-iy} = e^{-x}(\cos y - i \sin y) = e^{-x} \cos y - ie^{-x} \sin y$,

$$\begin{aligned} \text{b) } f(z) = \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)}{2i} = \frac{(e^{-y} - e^y) \cos x}{2i} + \frac{i(e^{-y} + e^y) \sin x}{2i} \\ &= i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x + \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x = \operatorname{ch}(y) \sin x + i \operatorname{sh}(y) \cos x. \end{aligned}$$

Autre méthode : $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)$.

Puisque $\cos(iy) = \operatorname{ch}(y)$ et $\sin(iy) = i \operatorname{sh}(y)$, on trouve $\sin z = \sin x \operatorname{ch}(y) + i \cos x \operatorname{sh}(y)$.

$$\begin{aligned} \text{c) } f(z) = 2^{z^2} &= e^{z^2 \operatorname{Log}(2)} = e^{(x+iy)^2(\ln(2)+2ik\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= e^{(x^2-y^2+2ixy)(\ln(2)+2ik\pi)} = e^{(x^2-y^2)\ln(2)-4k\pi xy+2i\{(x^2-y^2)k\pi+xy \ln 2\}} \\ &= e^{(x^2-y^2)\ln(2)-4k\pi xy} \{ \cos[2(x^2-y^2)k\pi+2xy \ln 2] + i \sin[2(x^2-y^2)k\pi+2xy \ln 2] \}. \end{aligned}$$

Pour la détermination principale ($k = 0$), $f(z) = 2^{(x^2-y^2)} \{ \cos(2xy \ln 2) + i \sin(2xy \ln 2) \}$.

d) $f(z) = \operatorname{ch}(z - i) = \operatorname{ch}(x + i(y - 1)) = \operatorname{ch}(x) \operatorname{ch}(i(y - 1)) + \operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(i(y - 1))$.

En notant que $\operatorname{ch}(i(y - 1)) = \cos(y - 1)$ et $\operatorname{sh}(i(y - 1)) = i \sin(y - 1)$, on obtient

$$f(z) = \operatorname{ch} x \cos(y - 1) + i \operatorname{sh} x \sin(y - 1).$$

$$\begin{aligned} \text{e) } f(z) = z^{2-i} &= e^{(2-i)\operatorname{Log}(z)} = e^{(2-i)(\ln(|z|)+i\arg(z))} = e^{2\ln(|z|)+\arg(z)+i(2\arg(z)-\ln(|z|))} \\ &= e^{2\ln(|z|)+\arg(z)} \{ \cos(2\arg(z) - \ln|z|) + i \sin(2\arg(z) - \ln|z|) \}. \end{aligned}$$

Puisque $\arg(z)$ peut s'écrire sous forme $\operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$ et $\ln(|z|) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$, on trouve

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(f(z)) &= (x^2 + y^2) e^{\operatorname{arctg}(\frac{y}{x})} \cos\left(2 \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)\right) \text{ et} \\ \operatorname{Im}(f(z)) &= (x^2 + y^2) e^{\operatorname{arctg}(\frac{y}{x})} \sin\left(2 \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)\right) \end{aligned}$$

Noter que $\operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) = \operatorname{Arctg}(\frac{y}{x}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, et donc f est une fonction multiforme.

=====

Exercice 2 : Démontrer les relations suivantes :

- a)** $|\sin z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}$, **b)** $|\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$,
c) $|\operatorname{sh} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y}$, **d)** $|\operatorname{ch} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \sin^2 y}$.

Solution. Nous pouvons calculer le module d'un nombre complexe w , soit par définition en identifiant ses parties réelles et imaginaires ou par la propriété $|w|^2 = w\bar{w}$.

Nous allons utiliser la propriété $|w|^2 = w\bar{w}$ ici.

• **a)** $|\sin z|^2 = \sin z \overline{\sin z} = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) \left(\frac{e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}}}{-2i} \right) = \frac{e^{i(z-\bar{z})} - e^{i(z+\bar{z})} - e^{-i(z+\bar{z})} + e^{-i(z-\bar{z})}}{4}$.

Puisque $z - \bar{z} = 2iy$ et $z + \bar{z} = 2x$, on a

$$|\sin z|^2 = \frac{e^{-2y} - e^{2ix} - e^{-2ix} + e^{2y}}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2} - \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \right) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(2y) - \cos(2x)).$$

En utilisant les transformations $\operatorname{ch}(2y) = 2 \operatorname{ch}^2 y - 1$ et $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$, on trouve le résultat demandé $|\sin z|^2 = \frac{1}{2} (2 \operatorname{ch}^2 y - 1 - (2 \cos^2 x - 1)) = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x$.

• **b)**

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 &= \cos z \overline{\cos z} = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) \left(\frac{e^{-i\bar{z}} + e^{i\bar{z}}}{2} \right) = \frac{e^{i(z-\bar{z})} + e^{i(z+\bar{z})} + e^{-i(z+\bar{z})} + e^{-i(z-\bar{z})}}{4} \\ &= \frac{e^{-2y} + e^{2ix} + e^{-2ix} + e^{2y}}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2} + \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(2y) + \cos(2x)). \end{aligned}$$

Par les transformations $\operatorname{ch}(2y) = 2 \operatorname{ch}^2 y - 1$ et $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$, on obtient la relation cherchée $|\cos z|^2 = \frac{1}{2} (2 \operatorname{ch}^2 y - 1 + 1 - 2 \sin^2 x) = \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x$.

• **c)** Nous avons $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh}(x + iy) = \frac{e^{x+iy} - e^{-(x+iy)}}{2} = \frac{e^{i(y-ix)} - e^{-i(y-ix)}}{2} = i \sin(y - ix)$.

D'après la relation **a)**,

$$|\operatorname{sh} z| = |i \sin(y - ix)| = |\sin(y - ix)| = \sqrt{\operatorname{ch}^2(-x) - \cos^2 y} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y}.$$

• **d)** $\operatorname{ch} z = \operatorname{ch}(x + iy) = \frac{e^{x+iy} + e^{-(x+iy)}}{2} = \frac{e^{i(y-ix)} + e^{-i(y-ix)}}{2} = \cos(y - ix)$.

D'après la relation **b)**, $|\operatorname{ch} z| = |\cos(y - ix)| = \sqrt{\operatorname{ch}^2(-x) - \sin^2 y} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \sin^2 y}$.

Exercice 3 : Vérifier que si $z_0 = \pi + i \operatorname{Log}(2 + \sqrt{5})$, alors $|\sin z_0| = 2$.

Solution. D'après l'exercice 2 a),

$$\begin{aligned} |\sin z_0| &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 y_0 - \cos^2 x_0} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \left(\operatorname{Log}(2 + \sqrt{5}) \right) - \cos^2(\pi)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{e^{\operatorname{Log}(2+\sqrt{5})} + e^{-\operatorname{Log}(2+\sqrt{5})}}{2} \right)^2 - (-1)^2} = \sqrt{\left(\frac{2 + \sqrt{5} + \frac{1}{2+\sqrt{5}}}{2} \right)^2 - 1} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2 + \sqrt{5} + \frac{2-\sqrt{5}}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}}{2} \right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{2 + \sqrt{5} + \frac{2-\sqrt{5}}{-1}}{2} \right)^2 - 1} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2 + \sqrt{5} - 2 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 - 1} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1} = 2. \end{aligned}$$

Exercice 4 : Trouver toutes les valeurs $z = x + iy$ telles que

a) $\sin z$ soit réel, b) $\operatorname{sh} z$ soit imaginaire pur.

Solution. a) D'après l'exercice 1 b), $\sin z = \sin x \operatorname{ch}(y) + i \cos x \operatorname{sh}(y)$.

La fonction $\sin z$ serait réelle si sa partie imaginaire s'annule. i.e. $\cos x \operatorname{sh}(y) = 0$,

ce qui est équivalent à $\cos x = 0$ ou $\operatorname{sh}(y) = 0$. D'où $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $y = 0$.

b) Tout d'abord, nous séparons les parties réelles et imaginaires de la fonction $\operatorname{sh} z$.

Nous avons $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh}(x + iy) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch}(iy) + \operatorname{ch} x \operatorname{sh}(iy) = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$.

La fonction $\operatorname{sh} z$ serait imaginaire pure si sa partie réelle s'annule. i.e. $\operatorname{sh} x \cos y = 0$,

d'où $x = 0$ ou $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5 : Démontrer que $e^{(\operatorname{Log} z)} = z$ et montrer que

l'égalité $\operatorname{Log}(e^z) = z$ n'est pas toujours vérifiée.

Solution. Soit z un nombre complexe, nous avons

$$\begin{aligned} e^{(\operatorname{Log} z)} &= e^{\ln(|z|) + i \arg(z)} = e^{\ln(|z|)} \{ \cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)) \} \\ &= |z| \{ \cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)) \}. \end{aligned}$$

La dernière formule est exactement l'écriture du nombre complexe z sous forme trigonométrique, i.e.

$|z| \{ \cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)) \} = z$, d'où $\operatorname{Log}(e^z) = z$. En ce qui concerne la deuxième partie de

l'exercice, par exemple dans le cas de la détermination principale, si nous prenons $z = 4i\pi$, nous

obtiendrons $\operatorname{Log}(e^z) = \operatorname{Log}(e^{4i\pi}) = \operatorname{Log}(1) = 0$ ce qui est différent de $4i\pi$.

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $\sin z = \frac{4}{3}i$, b) $\operatorname{sh} z = \frac{i}{2}$, c) $e^z = -2$, d) $e^z = 1 + i\sqrt{3}$.

Solution. a) D'après l'exercice 1 b), $\sin z = \sin x \operatorname{ch}(y) + i \cos x \operatorname{sh}(y)$. Alors $\sin z = \frac{4}{3}i$ entraîne $\sin x \operatorname{ch}(y) = 0$ et $\cos x \operatorname{sh}(y) = \frac{4}{3}$. Puisque $\operatorname{ch}(y) \geq 1$, on aura $\sin x = 0$ ou $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant dans la deuxième équation on obtient $\cos(k\pi) \operatorname{sh}(y) = \frac{4}{3}$ ou $\operatorname{sh}(y) = \frac{4}{3 \cos(k\pi)} = \frac{4}{3(-1)^k}$, d'où $y = \operatorname{Argsh}\left(\frac{4}{3(-1)^k}\right) = (-1)^k \operatorname{Argsh}\left(\frac{4}{3}\right)$, et donc les racines cherchés sont

$$z_k = k\pi + i(-1)^k \operatorname{Argsh}\left(\frac{4}{3}\right), k \in \mathbb{Z}.$$

b) D'après l'exercice 4 b), $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$. Donc l'équation $\operatorname{sh} z = \frac{i}{2}$ est équivalente à $\operatorname{sh} x \cos y = 0$ et $\operatorname{ch} x \sin y = \frac{1}{2}$.

Si $\operatorname{sh} x = 0$ ou $x = 0$, on aura $\sin y = \frac{1}{2}$ ou $\left\{ y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Si $\cos y = 0$ ou $y = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on obtient $\operatorname{ch} x \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}$ ou $\operatorname{ch} x = \frac{(-1)^k}{2}$ et ceci n'est pas possible car $\operatorname{ch} x \geq 1$.

Alors, les racines de l'équation $\operatorname{sh} z = \frac{i}{2}$ sont $z_k = i\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$ ou $z_k = i\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

c) Si $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y = -2$, alors $e^x \cos y = -2$ et $e^x \sin y = 0$.

Puisque $e^x > 0$, on aura $\sin y = 0$ ou $y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Donc la première équation devient

$$e^x \cos(k\pi) = -2 \text{ ou } e^x = \frac{-2}{\cos(k\pi)} = \frac{-2}{(-1)^k} = 2(-1)^{k+1}.$$

Ceci est possible seulement si $k+1$ est un nombre pair. Dans ce cas $x = \ln 2$. Alors les racines de l'équation $e^z = -2$ sont $z_k = \ln 2 + i(1+2k)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) Si $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y = 1 + i\sqrt{3}$, alors $e^x \cos y = 1$ et $e^x \sin y = \sqrt{3}$. En élevant au carré ces deux équations et en les additionnant membre à membre, on obtient $e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \sin^2 y = 1^2 + \sqrt{3}^2$.

Il vient alors $e^{2x} = 4$ ou $x = \ln 2$, et donc $\cos y = \frac{1}{2}$ et $\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D'où $y_k = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Finalement, les racines de l'équation $e^z = 1 + i\sqrt{3}$ sont $z_k = \ln 2 + i\left(\frac{1}{3} + 2k\right)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 7 : Calculer a) i^i , b) $(1-i)^{3-3i}$, c) $\operatorname{Log}(1+i)$.

Solution. a) $i^i = e^{i \operatorname{Log} i} = e^{i(\ln|i| + i \arg i)} = e^{i(\ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}, k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } (1-i)^{3-3i} &= e^{(3-3i) \operatorname{Log}(1-i)} = e^{(3-3i) \{\ln(|1-i|) + i \arg(1-i)\}} \\ &= e^{(3-3i) \left\{ \ln \sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right\}} = e^{3 \ln \sqrt{2} + 3\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + 3i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi - \ln \sqrt{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{\frac{3}{2}} e^{3(-\frac{1}{4}+2k)\pi} \{ \cos(3(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi - \ln \sqrt{2})) + i \sin(3(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi - \ln \sqrt{2})) \} \\
&= 2\sqrt{2} e^{3(-\frac{1}{4}+2k)\pi} \{ \cos(\frac{3}{4}\pi + 3 \ln \sqrt{2}) - i \sin(\frac{3}{4}\pi + 3 \ln \sqrt{2}) \}, k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

$$\text{c) } \text{Log}(1+i) = \ln(|1+i|) + i \arg(1+i) = \ln \sqrt{2} + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 8 : Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\text{ch}(iz) + i \text{sh}(iz)}, \text{ b) } \lim_{z \rightarrow -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z} + 1}{e^z + i}.$$

Solution. a) $\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\text{ch}(iz) + i \text{sh}(iz)} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2})}{\text{ch}(i\frac{\pi}{4}) + i \text{sh}(i\frac{\pi}{4})} = \frac{0}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i \left(i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = \frac{0}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{0}{0}$ forme indéterminée.

Donc on doit trouver un moyen pour enlever l'indétermination, pour cela on va remplacer $\text{ch}(iz)$ par $\cos z$ et $i \text{sh}(iz)$ par $-\sin z$. On obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\text{ch}(iz) + i \text{sh}(iz)} &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\cos z - \sin z} = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{\cos z - \sin z} \\
&= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos z - \sin z)(\cos z + \sin z)}{\cos z - \sin z} = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{z \rightarrow -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z} + 1}{e^z + i} = \frac{e^{-i\pi} + 1}{e^{-i\frac{\pi}{2}} + i} = \frac{-1 + 1}{-i + i} = \frac{0}{0} \text{ forme indéterminée.}$$

Par décomposition de numérateur $e^{2z} + 1 = (e^z)^2 - i^2 = (e^z - i)(e^z + i)$ nous voyons que

$$\lim_{z \rightarrow -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z} + 1}{e^z + i} = \lim_{z \rightarrow -i\frac{\pi}{2}} \frac{(e^z - i)(e^z + i)}{e^z + i} = e^{-i\frac{\pi}{2}} - i = -2i.$$

Exercice 9 : Montrer que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ n'existe pas.

Solution. Si la limite existait elle serait indépendante de la façon dont z tend vers 0.

Si $z \rightarrow 0$ le long de l'axe des x , alors $y = 0$ et $z = x + iy = x$, $\bar{z} = x - iy = x$; la limite cherchée est donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$.

Si $z \rightarrow 0$ le long de l'axe des y , alors $x = 0$ et $z = x + iy = iy$, $\bar{z} = x - iy = -iy$; la limite cherchée est $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-iy}{iy} = -1$.

Les deux expressions étant différentes, dépendant de la façon dont $z \rightarrow 0$, il n'y a pas de limite.