

Série d'exercices N° 5 : Formules intégrales de Cauchy

Exercice 1 :

Évaluer

a) $\oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz,$

b) $\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$ où C est le cercle $|z| = 3$.

Exercice 2 :

Soit f une fonction holomorphe dans un cercle C de rayon r , centré en a , et sur C . Démontrer le théorème de Gauss sur la valeur moyenne : la moyenne des valeurs de $f(z)$ sur C est $f(a)$, i.e.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

Exercice 3 :

En utilisant la formule intégrale de Cauchy, montrer que

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{4}\pi.$$

Indication : Poser $z = e^{i\theta}$, C le cercle unité $|z| = 1$, d'où $d\theta = \frac{dz}{iz}$ et $\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.