

Série d'exercices N° 5 : Formules intégrales de Cauchy

Exercice 1 :

Évaluer

a) $\oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz,$

b) $\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$ où C est le cercle $|z| = 3$.

Solution. a) De $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$, on tire

$$\oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz = \oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2} dz - \oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-1} dz$$

L'application de la formule de Cauchy pour $a = 2$ et $a = 1$ donne

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2} dz &= 2\pi i \{ \sin(\pi 2^2) + \cos(\pi 2^2) \} = 2\pi i, \\ \oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-1} dz &= 2\pi i \{ \sin(\pi 1^2) + \cos(\pi 1^2) \} = -2\pi i, \end{aligned}$$

car $z = 1$ et $z = 2$ sont à l'intérieur de C et $\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)$ est holomorphe dans C . L'intégrale considérée vaut donc $2\pi i - (-2\pi i) = 4\pi i$.

b) Soit $f(z) = e^{2z}$ et $a = -1$, la formule intégrale de Cauchy s'écrit

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz. \quad (1)$$

Si $n = 3$, alors $f'''(z) = 8e^{2z}$ et $f'''(-1) = 8e^{-2}$. Dans ces conditions la formule (1) devient

$$8e^{-2} = \frac{3!}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{2z}}{(z-a)^4} dz,$$

d'où l'on tire la valeur de l'intégrale considérée $\frac{8}{3}\pi i e^{-2}$.

Exercice 2 :

Soit f une fonction holomorphe dans un cercle C de rayon r , centré en a , et sur C . Démontrer le théorème de Gauss sur la valeur moyenne : la moyenne des valeurs de $f(z)$ sur C est $f(a)$, i.e.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

Solution. D'après la formule intégrale de Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz. \quad (2)$$

Si C a pour rayon r , l'équation de C est $|z-a| = r$ ou $z = a + re^{i\theta}$. Donc (2) devient

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta,$$

qui est le résultat demandé.

Exercice 3 :

En utilisant la formule intégrale de Cauchy, montrer que

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{4}\pi.$$

Indication : Poser $z = e^{i\theta}$, C le cercle unité $|z| = 1$, d'où $d\theta = \frac{dz}{iz}$ et $\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.

Solution. On pose $z = e^{i\theta}$. D'où $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$ ou $d\theta = \frac{dz}{iz}$ et $\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.

On a donc, si C désigne le cercle unité $|z| = 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta &= \oint_C \left\{ \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right\}^4 \frac{dz}{iz} = \frac{1}{24i} \oint_C \frac{1}{z} \left(z^4 + 4z^3 \frac{1}{z} + 6z^2 \frac{1}{z^2} + 4z \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} \right) dz \\ &= \frac{1}{16i} \oint_C \frac{1}{z} \left(z^4 + 4z^2 + 6 + \frac{4}{z^2} + \frac{1}{z^4} \right) dz = \frac{1}{16i} \oint_C \left(z^3 + 4z + \frac{6}{z} + \frac{4}{z^3} + \frac{1}{z^5} \right) dz \\ &= \frac{1}{16i} \oint_C (z^3 + 4z) dz + \frac{3}{8i} \oint_C \frac{1}{z} dz + \frac{1}{4i} \oint_C \frac{1}{z^3} dz + \frac{1}{16i} \oint_C \frac{1}{z^5} dz. \end{aligned}$$

La fonction $z^3 + 4z$ est holomorphe dans C , donc d'après le théorème de Cauchy $\oint_C (z^3 + 4z) dz = 0$.

Pour $f(z) = 1$ et $a = 0$, la formule intégrale de Cauchy s'écrit $f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z^{n+1}} dz$.

Si $n = 0, 2, 4$, on obtient

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i, \quad \oint_C \frac{1}{z^3} dz = 0, \quad \oint_C \frac{1}{z^5} dz = 0.$$

$$\text{D'où } \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{8i} (2\pi i) = \frac{3}{4}\pi.$$