

Série d'exercices N° 6 : Séries infinies, séries de Taylor, séries de Laurent

**Exercice 1 :**

Déterminer le domaine de convergence des séries

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ .

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$ .

**Solution. a)** Si  $u_n = \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ , alors  $u_{n+1} = \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ . D'où si l'on ne tient pas compte de la valeur  $z = 0$ , valeur pour laquelle la série converge, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{z^2 (2n-1)!}{(2n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^2 (2n-1)!}{(2n-1)! (2n+1) (2n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^2}{(2n+1) (2n)} = 0 < 1.$$

pour tout  $z$  fini. La série converge donc quel que soit  $z$ , ce que l'on traduit en disant la série converge pour  $|z| < \infty$ . De façon équivalente on peut dire que le cercle de convergence est infini ou que le rayon de convergence  $R = \infty$ .

**b)** Si  $u_n = n! z^n$ ,  $u_{n+1} = (n+1)! z^{n+1}$ . En excluant  $z = 0$  valeur pour laquelle la série donnée converge, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! z^{n+1}}{n! z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |z| = \infty.$$

La série converge donc seulement pour  $z = 0$ .

**Exercice 2 :**

Soit  $f(z) = \text{Log}(1+z)$ , où l'on considère la branche qui prend la valeur zéro pour  $z = 0$ .

- a) Développer  $f(z)$  en série de Taylor au voisinage de  $z = 0$ .
- b) Déterminer le domaine de convergence de la série de (a).

**Solution. a)** On a

$$\begin{aligned} f(z) &= \text{Log}(1+z) & f(0) &= 0, & f'(z) &= \frac{1}{1+z} = (1+z)^{-1} & f'(0) &= 1, \\ f''(z) &= -(1+z)^{-2} & f''(0) &= -1, & f'''(z) &= -(-2)(1+z)^{-3} & f'''(0) &= 2!, \\ &\dots & & & & & \\ f^{(n+1)}(z) &= (-1)^n n! (1+z)^{-(n+1)} & f^{(n+1)}(0) &= (-1)^n n! \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} f(z) = \text{Log}(1+z) &= f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \dots \\ &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

Autre méthode. Si  $|z| < 1$ ,  $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$ . On obtient alors par intégration entre 0 et  $z$

$$\text{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

b) Le  $n$ -ième terme est  $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n = a_n z^n$ . D'après le critère de d'Alembert

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{n+1}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

et la série converge pour  $|z| < 1$ .

On peut montrer que la série converge pour  $|z| = 1$  sauf pour  $z = -1$ .

Ce résultat est aussi une conséquence du fait que la série converge dans un cercle qui s'étend jusqu'à la singularité la plus proche (i.e.  $z = -1$ ) de  $(f(z))$ .

**Exercice 3 :** Déterminer le développement en série de Laurent des fonctions suivantes au voisinage des singularités indiquées.

a)  $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}; z = 1.$

b)  $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}; z = -2.$

**Solution.** a) Soit  $z - 1 = u$ . Alors  $z = 1 + u$  et

$$\begin{aligned} \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} &= \frac{e^{2+2u}}{u^3} = \frac{e^2}{u^3} \cdot e^{2u} = \frac{e^2}{u^3} \left\{ 1 + 2u + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^3}{3!} + \frac{(2u)^4}{4!} + \dots \right\} \\ &= \frac{e^2}{u^3} + \frac{2e^2}{u^2} + \frac{2e^2}{u} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2^4}{4!}e^2u + \dots \\ &= \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2}{3}e^2(z-1) + \dots \end{aligned}$$

Le point  $z = 1$  est un pôle d'ordre trois, ou pôle triple. La série converge pour toute valeur de  $z \neq 1$ .

b) Soit  $z + 2 = u$ . D'où

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z+1)(z+2)} &= \frac{u-2}{(u-1)u} = \frac{2-u}{u} \cdot \frac{1}{1-u} = \frac{2-u}{u} (1 + u + u^2 + u^3 + \dots) \\ &= \left( \frac{2}{u} + 2 + 2u + 2u^2 + \dots \right) - (1 + u + u^2 + u^3 + \dots) \\ &= \frac{2}{u} + 1 + u + u^2 + \dots = \frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \dots \end{aligned}$$

Le point  $z = -2$  est un pôle simple. La série converge pour toute valeur de  $z$  telle que  $0 < |z+2| < 1$ .