U.S.T.H.B. 2012-2013 Semestre 2 **Math 4 : Analyse complexe**

Faculté de Mathématiques **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section G**

Série d'exercices N° 7 : Théorème des résidus

===

Exercice 1 :

Trouver les résidus de **(a)** $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ et **(b)** $f(z) = \dfrac{e^z}{\sin^2 z}$ en tous les pôles à distance finie.

Solution.

(a) $f(z)$ possède un pôle double en $z = -1$ et des pôles simples en $z = \pm 2i$.

Le résidu en $z = -1$ est

$$\lim_{z \to -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ (z+1)^2 \cdot \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)} \right\} = \lim_{z \to -1} \frac{(z^2+4)(2z-2) - (z^2-2z)(2z)}{(z^2+4)^2} = -\frac{14}{25}.$$

Le résidu en $z = 2i$ est

$$\lim_{z \to 2i} \left\{ (z-2i) \cdot \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z+2i)(z-2i)} \right\} = \frac{-4-4i}{(2i+1)^2(4i)} = \frac{7+i}{25}.$$

Le résidu en $z = -2i$ est

$$\lim_{z \to -2i} \left\{ (z+2i) \cdot \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z+2i)(z-2i)} \right\} = \frac{-4+4i}{(-2i+1)^2(-4i)} = \frac{7-i}{25}.$$

(b) $f(z) = \dfrac{e^z}{\sin^2 z}$ possède des pôles doubles en $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$, i.e. $z = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

Méthode 1.

Le résidu en $z = m\pi$ est

$$\lim_{z \to m\pi} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ (z-m\pi)^2 \frac{e^z}{\sin^2 z} \right\} = \lim_{z \to m\pi} \frac{e^z \left[(z-m\pi)^2 \sin z + 2(z-m\pi)\sin z - 2(z-m\pi)^2 \cos z \right]}{\sin^3 z}$$

En posant $z - m\pi = u$ ou $z = u + m\pi$, cette limite peut être écrite sous la forme

$$\lim_{u \to 0} \frac{e^{u+m\pi} \left[u^2 \sin u + 2u \sin u - 2u^2 \cos u \right]}{\sin^3 u} = e^{m\pi} \lim_{u \to 0} \frac{u^2 \sin u + 2u \sin u - 2u^2 \cos u}{\sin^3 u} = e^{m\pi}.$$

Méthode 2. (à l'aide des séries de Laurent)

Cette méthode consiste à développer $f(z) = \dfrac{e^z}{\sin^2 z}$ en série de Laurent dans le voisinage de $z = m\pi$ et à chercher le coefficient de $\dfrac{1}{z - m\pi}$ qui est le résidu demandé. On pose pour

simplifier les calculs, $z = u + m\pi$. On doit alors développer la fonction en série de Laurent dans le voisinage de $u = 0$; la fonction considérée prend alors la forme $\dfrac{e^{m\pi u}}{\sin^2(m\pi + u)} = e^{m\pi}\dfrac{e^u}{\sin^2 u}$.
À l'aide des développements de Maclaurin de e^u et $\sin u$ on trouve par division

$$e^{m\pi}\frac{e^u}{\sin^2 u} = e^{m\pi}\frac{1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + ...}{\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - ...\right)^2} = e^{m\pi}\frac{1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + ...}{u^2\left(1 - \frac{u^2}{3!} + \frac{u^4}{5!} - ...\right)^2}$$
$$= e^{m\pi}\frac{1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + ...}{u^2\left(1 - \frac{u^2}{3} + \frac{2u^4}{45} - ...\right)} = e^{m\pi}\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} + \frac{5}{6} + \frac{u}{3} + ...\right),$$

le résidu est donc $e^{m\pi}$.

===

<u>Exercice 2</u> :

Calculer $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)}dz$ le long du cercle C d'équation **(a)** $|z| = 3$ et **(b)** $|z| = 1$.

Solution.

(a) La fonction à intégrer $\dfrac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)}$ possède un pôle double $z = 0$ et deux pôles simples en $z = -1 \pm i$ [racines de $z^2 + 2z + 2$]. Tous ces pôles sont intérieurs à $C : |z| = 3$.

Le résidu en $z = 0$ est

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{z^2\frac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)}\right\} = \lim_{z\to 0}\frac{(z^2+2z+2)e^z - e^z(2z+2)}{(z^2+2z+2)^2} = 0.$$

Le résidu en $z = -1 + i$ est

$$\lim_{z\to -1+i}\left\{(z-(-1+i))\frac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)}\right\} = \lim_{z\to -1+i}\frac{e^z}{z^2}\lim_{z\to -1+i}\left\{\frac{z-(-1+i)}{(z^2+2z+2)}\right\} = \frac{e^{-1+i}}{(-1+i)^2}\cdot\frac{1}{2i} = \frac{e^{-1+i}}{4}.$$

Le résidu en $z = -1 - i$ est

$$\lim_{z\to -1-i}\left\{(z-(-1-i))\frac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)}\right\} = \lim_{z\to -1-i}\frac{e^z}{z^2}\lim_{z\to -1-i}\left\{\frac{z-(-1-i)}{(z^2+2z+2)}\right\} = \frac{e^{-1-i}}{(-1-i)^2}\cdot\frac{1}{-2i} = \frac{e^{-1-i}}{4}.$$

On a alors par le théorème des résidus

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C\frac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)}dz = \text{somme des résidus intérieur à } |z| = 3.$$
$$= 0 + \frac{e^{-1+i}}{4} + \frac{e^{-1-i}}{4} = \frac{e^{-1}}{2}\cos(1).$$

(b) Le seul pôle intérieur à $|z| = 1$ est $z = 0$. Puisque le résidu en $z = 0$ est 0, on a donc

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C\frac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)}dz = 0.$$

==

Exercice 3 :

Evaluer **(a)** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}dx$ et **(b)** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}dx.$

Solution.

(a)

On considère $\int\limits_{C} \frac{1}{z^6+1}dz$, où C désigne le contour fermé de la figure ci-contre formé du segment, $[-R,+R]$ et du demi cercle Γ décrit dans le sens direct.

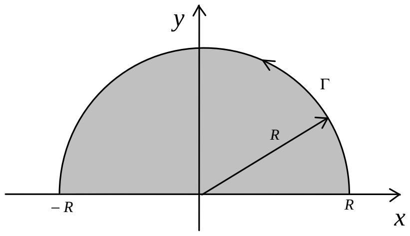

Figure 1.

Puisque $z^6+1=0$ pour $z = e^{\frac{\pi i}{6}}, e^{\frac{3\pi i}{6}}, e^{\frac{5\pi i}{6}}, e^{\frac{7\pi i}{6}}, e^{\frac{9\pi i}{6}}, e^{\frac{11\pi i}{6}}$, ces valeurs de z sont les pôles simples de $\frac{1}{z^6+1}$. Seuls les pôles $e^{\frac{\pi i}{6}}, e^{\frac{3\pi i}{6}}$ et $e^{\frac{5\pi i}{6}}$ sont à l'intérieur de C d'où en utilisant la règle de L'Hospital :

$$\begin{aligned}
\text{Résidu en } e^{\frac{\pi i}{6}} &= \lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{6}}} \left\{ \left(z - e^{\frac{\pi i}{6}}\right)\frac{1}{z^6+1} \right\} = \lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{6}}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{6}},\\
\text{Résidu en } e^{\frac{3\pi i}{6}} &= \lim_{z\to e^{\frac{3\pi i}{6}}} \left\{ \left(z - e^{\frac{3\pi i}{6}}\right)\frac{1}{z^6+1} \right\} = \lim_{z\to e^{\frac{3\pi i}{6}}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{2}},\\
\text{Résidu en } e^{\frac{5\pi i}{6}} &= \lim_{z\to e^{\frac{5\pi i}{6}}} \left\{ \left(z - e^{\frac{5\pi i}{6}}\right)\frac{1}{z^6+1} \right\} = \lim_{z\to e^{\frac{5\pi i}{6}}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{\frac{-25\pi i}{2}}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\int\limits_{C} \frac{1}{z^6+1}dz = 2\pi i\left\{\frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{6}} + \frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{2}} + \frac{1}{6}e^{\frac{-25\pi i}{2}}\right\} = \frac{2\pi}{3},$$

i.e.

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{1}{x^6+1}dx + \int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z^6+1}dz = \frac{2\pi}{3}. \tag{1}$$

Si l'on prend la limite des deux membres de (1) quand $R\to\infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z^6+1}dz = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{(R\,e^{i\theta})^6+1}R\,ie^{i\theta}d\theta = 0,$$

on obtient $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{1}{x^6+1}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}dx = \frac{2\pi}{3}.$

Noter que $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}dx = \frac{\pi}{3}.$

(b) Les pôles de $\dfrac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^2+2z+2\right)}$ situés à l'intérieur du contour C de la figure 1 de **(a)** sont $z=i$ d'ordre 2 et $z=-1+i$ d'ordre 1.

Le résidu en $z=i$ est

$$\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left\{(z-i)^2\frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2\left(z^2+2z+2\right)}\right\}=\frac{-12+9i}{100}.$$

Le résidu en $z=-1+i$ est

$$\lim_{z\to -1+i}\left\{(z-(-1+i))\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2(z-(-1+i))(z-(-1-i))}\right\}=\frac{3-4i}{25}.$$

D'où

$$\oint_C\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^2+2z+2\right)}dz=2\pi i\left\{\frac{-12+9i}{100}+\frac{3-4i}{25}\right\}=\frac{7\pi}{50}$$

ou

$$\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+2x+2\right)}dx+\int_\Gamma\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^2+2z+2\right)}dz=\frac{7\pi}{50}.$$

En prenant la limite de ces expressions quand $R\to\infty$ et en remarquant que la deuxième intégrale tend vers 0

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^2+2z+2\right)}dz=\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi\frac{\left(R\,e^{i\theta}\right)^2}{\left(\left(R\,e^{i\theta}\right)^2+1\right)^2\left(\left(R\,e^{i\theta}\right)^2+2R\,e^{i\theta}+2\right)}R\,ie^{i\theta}d\theta=0,$$

nous obtenons le résultat demandé. i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+2x+2\right)}dx=\frac{7\pi}{50}.$$

==

<u>**Exercice 4**</u> **:**

Evaluer **(a)** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta}d\theta$ et **(b)** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}d\theta.$

Solution.

(a) Soit $z=e^{i\theta}$. D'où $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\dfrac{z-z^{-1}}{2i}$, $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\dfrac{z+z^{-1}}{2}$, $dz=izd\theta$ et alors

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta}d\theta=\oint_C\frac{1}{3-2\frac{z+z^{-1}}{2}+\frac{z-z^{-1}}{2i}}\frac{dz}{iz}=\oint_C\frac{2}{(1-2i)\,z^2+6iz-1-2i}dz$$

où C est le cercle de rayon 1 centré à l'origine.

Les pôles de $\dfrac{2}{(1-2i)\,z^2+6iz-1-2i}$ sont les pôles simples

$$z=\frac{-6i\pm\sqrt{(6i)^2-4\,(1-2i)\,(-1-2i)}}{2\,(1-2i)}=\frac{-6i\pm 4i}{2\,(1-2i)}=2-i \text{ ou } \frac{2-i}{5}.$$

Seul $\dfrac{2-i}{5}$ est à l'intérieur de C.

Le résidu en $\dfrac{2-i}{5}$ est

$$\lim_{z\to\frac{2-i}{5}}\left\{\left(z-\frac{2-i}{5}\right)\frac{2}{(1-2i)\,z^2+6iz-1-2i}\right\}=\lim_{z\to\frac{2-i}{5}}\frac{2}{2\,(1-2i)\,z+6i}=\frac{1}{2i}$$

d'après la règle de L'Hospital.

D'où $\displaystyle\oint_C\frac{2}{(1-2i)\,z^2+6iz-1-2i}dz=2\pi i\frac{1}{2i}=\pi$, qui est la valeur demandée.

(b) On pose $z=e^{i\theta}$. D'où $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\dfrac{z-z^{-1}}{2i}$, $dz=ie^{i\theta}dz=izd\theta$ et donc

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}d\theta=\oint_C\frac{1}{2+\frac{z-z^{-1}}{2i}}\frac{dz}{iz}=\oint_C\frac{2}{z^2+4iz-1}dz,$$

où C est le cercle unité centré à l'origine.

Les pôles de $\dfrac{2}{z^2+4iz-1}$ sont obtenus en résolvant $z^2+4iz-1=0$ et sont donnés par

$$z=\frac{-2i\pm\sqrt{(2i)^2-(-1)\,(1)}}{1}=-2i\pm\sqrt{-3}=\left(-2\pm\sqrt{3}\right)i.$$

Seul $\left(-2+\sqrt{3}\right)i$ est à l'intérieur de C, car

$$\left|\left(-2+\sqrt{3}\right)i\right|=2-\sqrt{3}<1 \text{ et } \left|\left(-2-\sqrt{3}\right)i\right|=2+\sqrt{3}>1.$$

Le résidu en $\left(-2+\sqrt{3}\right)i$ est

$$\lim_{z\to\left(-2+\sqrt{3}\right)i}\left\{\left(z-\left(-2+\sqrt{3}\right)i\right)\frac{2}{z^2+4iz-1}\right\}=\lim_{z\to\left(-2+\sqrt{3}\right)i}\frac{2}{2z+4i}=\frac{1}{\sqrt{3}i}$$

d'après la règle de L'Hospital.

D'où $\displaystyle\oint_C\frac{2}{z^2+4iz-1}dz=2\pi i\frac{1}{\sqrt{3}i}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, qui est la valeur demandée.

===

Exercice 5 :

Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}e^{-m},\ m>0.$

Solution.

On considère $\displaystyle\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz$ où C est le contour de la figure 1 de l'exercice 3. La fonction à intégrer possède des pôles simples $z=\pm i$ mais seul $z=i$ est intérieur à C.

Le résidu en $z=i$ est

$$\lim_{z\to i}\left\{(z-i)\,\frac{e^{imz}}{(z-i)\,(z+i)}\right\} = \frac{e^{-m}}{2i}.$$

D'où

$$\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz = 2\pi i\left(\frac{e^{-m}}{2i}\right) = \pi e^{-m}$$

ou

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{imx}}{x^2+1}dx + \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz = \pi e^{-m}$$

i.e.

$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos mx}{x^2+1}dx + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin mx}{x^2+1}dx + \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz = \pi e^{-m}.$$

Puisque

$$\int_{-R}^{R} \frac{\sin mx}{x^2+1}dx = 0 \text{ et } \int_{-R}^{R} \frac{\cos mx}{x^2+1}dx = 2\int_0^{R} \frac{\cos mx}{x^2+1}dx,$$

on aura

$$2\int_0^{R} \frac{\cos mx}{x^2+1}dx + \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz = \pi e^{-m}.$$

Si l'on fait tendre R vers ∞ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz = \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{e^{imR\,e^{i\theta}}}{(R\,e^{i\theta})^2+1}d\theta = \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{e^{imR\cos\theta}e^{-mR\sin\theta}}{(R\,e^{i\theta})^2+1}d\theta = 0,$$

on obtient le résultat demandé. i.e. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}e^{-m}.$

==

Exercice 6 :

Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$

Solution.

La méthode de 'exercice 5 nous conduit à considérer l'intégrale de $\dfrac{e^{iz}}{z}$ le long du contour de la figure 1 page 3. Toutefois étant donné que $z=0$ appartient au contour d'intégration et qu'une singularité ne peut appartenir à un tel contour, on modifie celui-ci en évitant le point $z=0$ comme il est montré à la figure 2 ci-contre ; on obtient ainsi le contour C' ou $ABDEFGHJA$.

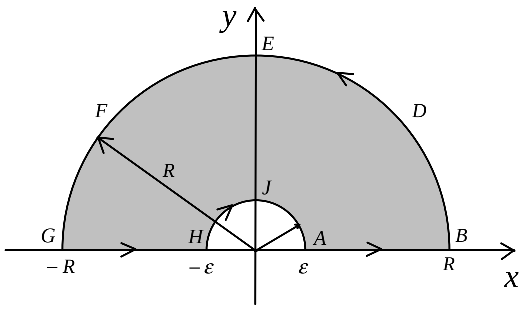

Figure 2.

Le point $z=0$ étant à l'extérieur de C', on a $\displaystyle\oint_{C'} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$

ou

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0.$$

En changeant x en $-x$ dans la première intégrale et en combinant avec la troisième, on trouve

$$\int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx + \int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

ou

$$2i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}dx = -\int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z}dz - \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z}dz. \tag{2}$$

On fait tendre $\varepsilon \to 0$ et $R \to \infty$. La deuxième intégrale du second membre tend vers zéro car

$$\lim_{R\to\infty} \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z}dz = \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{\pi} \frac{e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{R\,e^{i\theta}} Rie^{i\theta}d\theta = \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{\pi} ie^{iR\cos\theta}e^{-R\sin\theta}d\theta = 0.$$

Si l'on pose $z=\varepsilon e^{i\theta}$ dans la première intégrale du deuxième membre de (2), on voit que sa limite est

$$-\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z}dz = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\pi}^{0} \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta}d\theta = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\pi}^{0} ie^{i\varepsilon e^{i\theta}}d\theta = \pi i$$

par passage à la limite sous le symbole d'intégration.

On a donc

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} 2i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}dx = \pi i \quad \text{ou} \quad \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

==

Exercice 7 :

Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}, \quad 0 < p < 1.$

Solution.

Considérons $\displaystyle\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z}dz$. Le point $z = 0$ étant un point de branchement, on utilisera le contour C de la figure 3 ci-contre où l'axe réel positif est la coupure et où AB et GH coïncident avec l'axe des x mais sont montrés séparés pour une meilleure compréhension.

La fonction que l'on intègre a un pôle simple $z = -1$ intérieur à C.

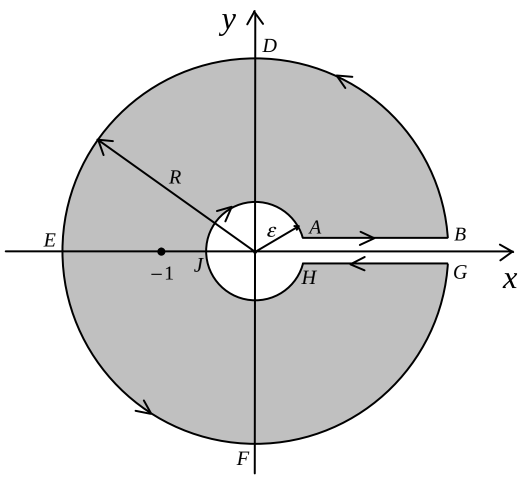

Figure 3.

Le résidu en $z = -1$ est

$$\lim_{z\to-1}(z+1)\frac{z^{p-1}}{1+z} = (-1)^{p-1} = \left(e^{\pi i}\right)^{p-1} = e^{(p-1)\pi i}.$$

On a donc $\displaystyle\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z}dz = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$ ou

$$\int_{AB}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz + \int_{BDEFG}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz + \int_{GH}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz + \int_{HJA}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}.$$

On peut donc écrire

$$\int_\varepsilon^R \frac{x^{p-1}}{1+x}dx + \int_0^{2\pi}\frac{\left(R\,e^{i\theta}\right)^{p-1}}{1+R\,e^{i\theta}}iR\,e^{i\theta}d\theta + \int_R^\varepsilon \frac{\left(xe^{2\pi i}\right)^{p-1}}{1+xe^{2\pi i}}dx + \int_{2\pi}^0 \frac{\left(\varepsilon e^{i\theta}\right)^{p-1}}{1+\varepsilon e^{i\theta}}i\varepsilon e^{i\theta}d\theta = 2\pi i e^{(p-1)\pi i},$$

où l'on a posé $z = xe^{2\pi i}$ pour l'intégrale le long de GH, l'argument de z ayant augmenté de 2π en parcourant le cercle $BDEFG$.

Si l'on prend la limite quand $\varepsilon \to 0$ et $R \to \infty$, remarquant que la deuxième et la quatrième intégrales tendent vers zéro, on trouve

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx + \int_\infty^0 \frac{e^{2\pi i(p-1)}x^{p-1}}{1+x}dx = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$$

ou

$$\left(1-e^{2\pi i(p-1)}\right)\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$$

si bien que

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{2\pi i e^{(p-1)\pi i}}{1-e^{2\pi i(p-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{-(p-1)\pi i}-e^{\pi i(p-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{-p\pi i}e^{\pi i}-e^{\pi i p}e^{-\pi i}} = \frac{2\pi i}{e^{\pi i p}-e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}.$$

==

Exercice 8 :

Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(ax)}{\operatorname{ch} x}dx = \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}$, où $|a|<1$.

Solution.

Considérons $\displaystyle\int_C \frac{e^{az}}{\operatorname{ch} z}dz$ où C est un rectangle de sommets $-R$, R, $R+\pi i$, $-R+\pi i$, voir figure 4 ci-contre. Les pôles de $\dfrac{e^{az}}{\operatorname{ch} z}$ sont simples et sont obtenus pour $\operatorname{ch} x = 0$, i.e. $z=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$. Le seul pôle situé à l'intérieur de C est $\dfrac{i\pi}{2}$.

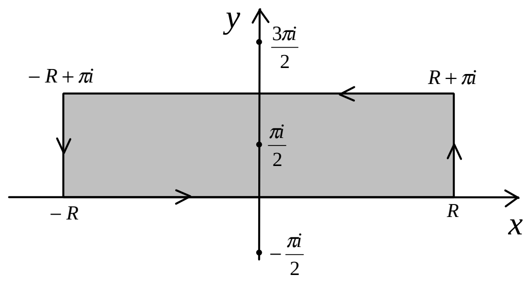

Figure 4.

Le résidu de $\dfrac{e^{az}}{\operatorname{ch} z}$ en $z=\dfrac{i\pi}{2}$ est

$$\lim_{z\to\frac{i\pi}{2}}\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)\frac{e^{az}}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^{a\frac{i\pi}{2}}}{\operatorname{sh}\left(\frac{i\pi}{2}\right)} = \frac{e^{a\frac{i\pi}{2}}}{i\sin\frac{\pi}{2}} = -ie^{a\frac{i\pi}{2}}.$$

On a donc d'après le théorème des résidus,

$$\int_C \frac{e^{az}}{\operatorname{ch} z}dz = 2\pi i\left(-ie^{a\frac{i\pi}{2}}\right) = 2\pi e^{a\frac{i\pi}{2}},$$

ce qui peut s'écrire

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} x}dx + \int_0^\pi \frac{e^{a(R+iy)}}{\operatorname{ch}\,(R+iy)}idy + \int_R^{-R}\frac{e^{a(x+\pi i)}}{\operatorname{ch}\,(x+\pi i)}dx + \int_\pi^0 \frac{e^{a(-R+iy)}}{\operatorname{ch}\,(-R+iy)}idy = 2\pi e^{a\frac{i\pi}{2}}. \qquad (3)$$

Quand $R\to\infty$ la deuxième et la quatrième intégrale du premier membre tendent vers zéro.

Pour montrer cela considérons la deuxième intégrale ; de

$$|\operatorname{ch}\,(R+iy)| = \left|\frac{e^{R+iy}+e^{-R-iy}}{2}\right| \geq \frac{1}{2}\left\{\left|e^{R+iy}\right|-\left|e^{-R-iy}\right|\right\} = \frac{1}{2}\left(e^R-e^{-R}\right) \geq \frac{1}{4}e^R,$$

on déduit

$$\left| \int_0^\pi \frac{e^{a(R+iy)}}{\text{ch }(R+iy)} i dy \right| \le \int_0^\pi \frac{e^{aR}}{\frac{1}{4}e^R} dy = 4\pi e^{(a-1)R}$$

et le résultat en découle si l'on remarque que le second membre tend vers zéro quand $R \to \infty$ car $|a| < 1$.

De la même façon on peut montrer que la quatrième intégrale du premier membre de (3) tend vers zéro quand $R \to \infty$. L'égalité (3) devient alors

$$\lim_{R\to\infty} \left\{ \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{\text{ch}\, x} dx + e^{a\pi i} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{\text{ch}\, x} dx \right\} = 2\pi e^{a\frac{i\pi}{2}}$$

ou

$$\left(1 + e^{a\pi i}\right) \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{\text{ch}\, x} dx = 2\pi e^{a\frac{i\pi}{2}}$$

car $\text{ch}\,(x + \pi i) = \text{ch}\, x$. On a donc

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{\text{ch}\, x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\text{ch}\, x} dx = \frac{2\pi e^{a\frac{i\pi}{2}}}{1 + e^{a\pi i}} = \frac{2\pi}{e^{-a\frac{i\pi}{2}} + e^{a\frac{i\pi}{2}}} = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}.$$

De

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ax}}{\text{ch}\, x} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\text{ch}\, x} dx = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}$$

on tire en changeant x en $-x$ dans la première intégrale

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-ax}}{\text{ch}\, x} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\text{ch}\, x} dx = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\text{ch }(ax)}{\text{ch}\, x} dx = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)},$$

d'où l'on déduit le résultat cherché.

==

<u>Exercice 9</u> :

Démontrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\text{Log}\,(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \,\text{Log}\, 2.$

Solution.

On considère $\displaystyle\oint_C \frac{\text{Log}\,(z+i)}{z^2+1} dz$ le long du contour C formé d'une portion de l'axe réel de $-R$ à R et du demi-cercle Γ de rayon R, voir figure 5 ci-contre. Le seul pôle de $\dfrac{\text{Log}\,(z+i)}{z^2+1}$

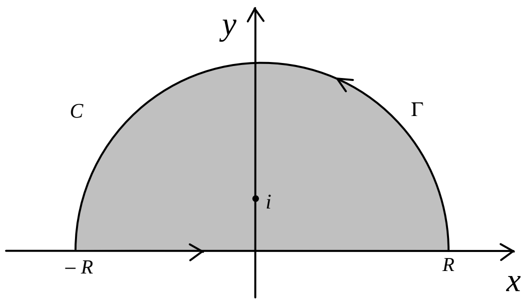

Figure 5.

intérieur à C est le pôle simple $z = i$, et le résidu est

$$\lim_{z \to i} (z - i) \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{(z-i)(z+i)} = \frac{\operatorname{Log}(2i)}{2i}.$$

On a donc d'après le théorème des résidus

$$\oint_C \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1} dz = 2\pi i \ \operatorname{Res}\ (f, i) = 2\pi i \left(\frac{\operatorname{Log}(2i)}{2i} \right) = \pi \ \operatorname{Log}(2i) = \pi \ln(2) + \frac{1}{2}\pi^2 i,$$

en utilisant la détermination principale du logarithme. Ce résultat peut s'écrire sous la forme

$$\int_{-R}^{R} \frac{\operatorname{Log}(x+i)}{x^2+1} dx + \int_\Gamma \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1} dz = \pi \ln(2) + \frac{1}{2}\pi^2 i$$

ou

$$\int_{-R}^{0} \frac{\operatorname{Log}(x+i)}{x^2+1} dx + \int_{0}^{R} \frac{\operatorname{Log}(x+i)}{x^2+1} dx + \int_\Gamma \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1} dz = \pi \ln(2) + \frac{1}{2}\pi^2 i.$$

En changeant x en $-x$ dans la première intégrale, on obtient

$$\int_{0}^{R} \frac{\operatorname{Log}(i-x)}{x^2+1} dx + \int_{0}^{R} \frac{\operatorname{Log}(i+x)}{x^2+1} dx + \int_\Gamma \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1} dz = \pi \ln(2) + \frac{1}{2}\pi^2 i,$$

où puisque $\operatorname{Log}(i-x) + \operatorname{Log}(i+x) = \operatorname{Log}(i^2 - x^2) = \operatorname{Log}(x^2+1) + \pi i$,

$$\int_{0}^{R} \frac{\operatorname{Log}(x^2+1)}{x^2+1} dx + \int_{0}^{R} \frac{\pi i}{x^2+1} dx + \int_\Gamma \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1} dz = \pi \ln(2) + \frac{1}{2}\pi^2 i.$$

Quand $R \to \infty$ l'intégrale le long de Γ tend vers zéro car

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_\Gamma \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1} dz \right| = \lim_{R\to\infty} \left| \int_0^\pi \frac{\operatorname{Log}(R\ e^{it}+i)}{R^2\ e^{2it}+1} Rie^{it} dt \right| \le \lim_{R\to\infty} \left| 4\pi \frac{\operatorname{Log}(R+1) + 2\pi}{R^2-1} R \right| = 0.$$

On a alors en prenant les parties réelles et imaginaires

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\operatorname{Log}(x^2+1)}{x^2+1} dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{Log}(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \ln 2.$$

==