U.S.T.H.B. 2012-2013 Semestre 2 **Math 4 : Analyse complexe**
Faculté de Mathématiques **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section G**

Série d'exercices pour se préparer à l'examen final

Exercice 1 :

a) Déterminer toutes les valeurs de $(1+i)^i$ et $1^{\sqrt{2}}$.

b) Trouver les valeurs de $4\,\text{sh}\left(\frac{\pi}{3}i\right)$ et $\text{ch}\left(\frac{\pi}{2}i\right)$.

Exercice 2 :

Déterminer $u\,(x,y)$ et $v\,(x,y)$ telles que **a)** $\text{sh}\,(2z) = u + iv$, **b)** $ze^z = u + iv$.

Exercice 3 :

À l'aide de la définition déterminer la dérivée de $f\,(z) = iz^2$ au point $z = 1 + i$.

Exercice 4 :

Examiner si les fonctions suivantes sont holomorphes dans $\mathbb{C}$.

a) $(x\cos y - y\sin y)\,e^x + i\,(x\sin y + y\cos y)\,e^x$, **b)** $x^2 - y^2 + x + i\,(2xy - y)$.

Exercice 5 :

a) Montrer que la fonction $u = 2x(1-y)$ est harmonique.

b) Trouver une fonction v telle que $f\,(z) = u + iv$ soit holomorphe.

c) Exprimer $f\,(z)$ à l'aide de la variable z.

Exercice 6 :

Calculer $\oint_C (x^2 - iy^2)\,dz$ le long

a) de la parabole $y = 2x^2$ de $(1,1)$ à $(2,8)$,

b) des segments de droite joignant $(1,1)$ à $(1,8)$ et $(1,8)$ à $(2,8)$,

c) du segment de droite joignant $(1,1)$ à $(2,8)$.

Exercice 7 :

Calculer $\oint_C z^2 dz$ le long du carré de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

Exercice 8 :

Calculer $\oint_C (z^2 + 3z)\,dz$ le long

a) du cercle $|z| = 2$ de $(2,0)$ à $(0,2)$ dans le sens direct,

b) du segment de droite joignant $(2,0)$ à $(0,2)$,

c) du contour polygonal formé par les segments de droite joignant $(2,0)$ à $(2,2)$ et $(2,2)$ à $(0,2)$.

Exercice 9 :

Calculer $\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz$ si C désigne **(a)** le cercle $|z| = 3$, **(b)** le cercle $|z| = 1$.

Exercice 10 :

Développer en série de Laurent autour de leurs points singuliers les fonctions suivantes, et préciser la nature des points singuliers.

(a) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, **(b)** $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$.

Exercice 11 :

Pour chacune des fonctions suivantes déterminer les pôles et les résidus en ces pôles.

(a) $f(z) = \frac{2z+1}{z^2 - z - 2}$, **(b)** $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$, **(c)** $f(z) = \frac{z^2+4}{z^3 + 2z^2 + 2z}$.