U.S.T.H.B. 2012-2013 Semestre 2 **Math 4 : Analyse complexe**
Faculté de Mathématiques **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section G**

Série d'exercices pour se préparer à l'examen final

==

Exercice 1 :

a) Déterminer toutes les valeurs de $(1+i)^i$ et $1^{\sqrt{2}}$.

b) Trouver les valeurs de $4\ \mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{3}i\right)$ et $\mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{2}i\right)$.

Solution.

a) $(1+i)^i = e^{i\,\mathrm{Log}\,(1+i)} = e^{i\,(\ln|1+i|+i\arg(1+i))} = e^{i\left(\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} = e^{i\ln\sqrt{2}-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}, k\in\mathbb{Z}.$

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\mathrm{Log}\,1} = e^{\sqrt{2}(\ln|1|+i\arg 1)} = e^{\sqrt{2}(0+i2k\pi)} = e^{i2\sqrt{2}k\pi} = \cos\left(2\sqrt{2}k\pi\right)+i\sin\left(2\sqrt{2}k\pi\right), k\in\mathbb{Z}.$$

b) $4\ \mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{3}i\right) = 4\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}-e^{-\frac{\pi}{3}i}}{2} = 2\left\{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}-\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\} = 4i\sin\frac{\pi}{3} = 2i\sqrt{3}.$

$$\mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{2}i\right) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}+e^{-\frac{\pi}{2}i}}{2} = \frac{1}{2}\left\{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right\} = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

==

Exercice 2 :

Déterminer $u(x,y)$ et $v(x,y)$ telles que **a)** $\mathrm{sh}\,(2z) = u+iv$, **b)** $ze^z = u+iv$.

Solution.

a) $\mathrm{sh}\,(2z) = \mathrm{sh}\,(2x+2iy) = \mathrm{sh}\,(2x)\ \mathrm{ch}\,(2iy) + \mathrm{ch}\,(2x)\ \mathrm{sh}\,(2iy)$

En notant que $\mathrm{ch}\,(2iy) = \cos(2y)$ et $\mathrm{sh}\,(2iy) = i\sin(2y)$ on obtient

$$\mathrm{sh}\ (2z) = \mathrm{sh}\ (2x)\cos(2y) + i\,\mathrm{ch}\ (2x)\sin(2y)\,.$$

b)

$$\begin{aligned} ze^z &= (x+iy)\,e^{x+iy} = (x+iy)\,e^x(\cos x+i\sin x) \\ &= e^x(x\cos x - y\sin y) + ie^x(x\sin x+y\cos x)\,. \end{aligned}$$

==

Exercice 3 :

À l'aide de la définition déterminer la dérivée de $f(z) = iz^2$ au point $z_0 = 1+i$.

Solution. Par définition, la dérivée en z_0 si elle existe est

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{iz^2-iz_0^2}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{i(z+z_0)(z-z_0)}{z-z_0} = 2iz_0 = -2+2i.$$

La limite existe en $z_0 = 1+i$, donc la dérivée de f en $1+i$ est donnée par $f'(1+i) = -2+2i$.

==

Exercice 4 :

Examiner si les fonctions suivantes sont holomorphes dans $\mathbb{C}$.

a) $(x\cos y - y\sin y)\,e^x + i\,(x\sin y + y\cos y)\,e^x$, **b)** $x^2 - y^2 + x + i\,(2xy - y)$.

Solution.

Si les dérivées partielles sont continues dans le domaine indiqué, les équations de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ sont nécessaires et suffisantes pour que $f = u + iv$ soit holomorphe.

a) On a $(x\cos y - y\sin y)\,e^x$ et $v = (x\sin y + y\cos y)\,e^x$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y + (x\cos y - y\sin y)\,e^x = (\cos y + x\cos y - y\sin y)\,e^x,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = (x\cos y + \cos y - y\sin y)\,e^x \quad\rightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (-x\sin y - \sin y - y\cos y)\,e^x,\ \frac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y + (x\sin y + y\cos y)\,e^x \quad\rightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites, la fonction f est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$.

b) On a $u = x^2 - y^2 + x$ et $v = 2xy - y$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 1 \quad\rightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad\rightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

La première équation de Cauchy-Riemann n'est pas satisfaite, alors la fonction f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

==

Exercice 5 :

a) Montrer que la fonction $u = 2x(1-y)$ est harmonique.

b) Trouver une fonction v telle que $f(z) = u + iv$ soit holomorphe.

c) Exprimer $f(z)$ à l'aide de la variable z.

Solution.

a) On a $u = 2x(1-y) = 2x - 2xy$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2 - 2y$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2x$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

On obtient $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0$, ce qui montre que u est harmonique.

b) Pour trouver une fonction v pour que $f = u + iv$ soit holomorphe, on utilise les équations de Cauchy-Riemann.

Les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2 - 2y, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -(-2x) = 2x. \tag{2}$$

En intégrant l'équation (1) par rapport à y, il vient

$$v = 2y - y^2 + C_1(x), \tag{3}$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x.

Par substitution de (3) dans (2) on obtient

$$\frac{d}{dx}C_1(x) = 2x \quad \rightarrow \quad C_1(x) = x^2 + c,$$

où c désigne une constante. D'où de (3)

$$v = 2y - y^2 + x^2 + c.$$

c) On a $f(z) = u + iv = 2x(1-y) + i\left(2y - y^2 + x^2 + c\right)$.

En remplaçant x par $\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et y par $\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ on obtient

$$\begin{aligned} f(z) &= (z+\overline{z})\,(1 - \frac{z-\overline{z}}{2i}) + i\left(\frac{z-\overline{z}}{i} - \left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2 + c\right) \\ &= z + \overline{z} + \frac{1}{2}i\left(z^2 - \overline{z}^2\right) + z - \overline{z} + \frac{1}{4}i\left(z^2 + \overline{z}^2 - 2z\overline{z}\right) + \frac{1}{4}i\left(z^2 + \overline{z}^2 + 2z\overline{z}\right) + ic \\ &= 2z + i\left(z^2 + c\right). \end{aligned}$$

==

<u>Exercice 6</u> :

Calculer $\oint_C (x^2 - iy^2)\,dz$ le long

a) de la parabole $y = 2x^2$ de $(1,2)$ à $(2,8)$,

b) des segments de droite joignant $(1,2)$ à $(1,8)$ et $(1,8)$ à $(2,8)$,

c) du segment de droite joignant $(1,2)$ à $(2,8)$.

Solution.

a) En remplaçant y par $2x^2$, l'intégrale donnée a alors pour valeur

$$\begin{aligned} \oint_C (x^2 - iy^2)\,dz &= \int_{x=1}^{2} \left\{x^2 - i\left(2x^2\right)^2\right\}\left\{dx + id\left(2x^2\right)\right\} = \int_{x=1}^{2} (x^2 - 4ix^4)\,(dx + 4ixdx) \\ &= \int_1^2 (x^2 - 4ix^4)\,(1 + 4ix)\,dx = \int_1^2 \left\{x^2 + 16x^5 + i\left(4x^3 - 4x^4\right)\right\} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{16}{6}x^6 + i\left(x^4 - \frac{4}{5}x^5\right)\right]_1^2 = \frac{511}{3} - \frac{49}{5}i. \end{aligned}$$

b) Le long du segment de droite d'extrémités $(1,2)$ et $(1,8)$, $x=1$, $dx=0$ et l'intégrale vaut

$$\int_{y=2}^{8}\left(1^2-iy^2\right)(0+idy)=\int_{2}^{8}\left(i+y^2\right)dy=\left[iy+\frac{y^3}{3}\right]_2^8=168+6i.$$

Le long du segment de droite d'extrémités $(1,8)$ et $(2,8)$, $y=8$, $dy=0$ et l'intégrale vaut

$$\int_{x=1}^{2}\left(x^2-i8^2\right)(dx+i0)=\int_{x=1}^{2}\left(x^2-64i\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-64ix\right]_1^2=\frac{7}{3}-64i.$$

Le résultat demandé est donc $=168+6i+\dfrac{7}{3}-64i=\dfrac{511}{3}-58i.$

c) Une équation de la droite joignant $(1,2)$ à $(2,8)$ est $y=6x-4$. D'où la valeur de l'intégrale est

$$\begin{aligned}\int_{x=1}^{2}\left(x^2-i\left(6x-4\right)^2\right)\left(dx+id\left(6x-4\right)\right) &= \int_{x=1}^{2}\left(x^2-i\left(6x-4\right)^2\right)(1+6i)\,dx\\ &=\left[(1+6i)\left(\frac{x^3}{3}-\frac{i}{18}\left(6x-4\right)^3\right)\right]_1^2=\frac{511}{3}-14i\end{aligned}$$

Ce résultat peut aussi être obtenu en utilisant $x=\dfrac{1}{6}(y+4)$.

===

<u>Exercice 7</u> :

Calculer $\displaystyle\oint_C z^2dz$ le long du carré de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

Solution.

Le long du segment de droite d'extrémités $(0,0)$ et $(1,0)$, $y=0$, $dy=0$; et l'intégrale vaut

$$\int_{x=0}^{1}(x+i0)^2(dx+i0)=\int_{0}^{1}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}.$$

Le long du segment de droite d'extrémités $(1,0)$ et $(1,1)$, $x=1$, $dx=0$; et l'intégrale vaut

$$\int_{y=0}^{1}(1+iy)^2(0+idy)=\int_{y=0}^{1}i\,(1+iy)^2\,dy=\left[\frac{1}{3}(1+iy)^3\right]_0^1=-1+\frac{2}{3}i.$$

Le long du segment de droite d'extrémités $(1,1)$ et $(0,1)$, $y=1$, $dy=0$; et l'intégrale vaut

$$\int_{x=1}^{0}(x+i1)^2(dx+i0)=\int_{x=1}^{0}(x+i1)^2\,dx=\left[\frac{1}{3}(x+i)^3\right]_1^0=\frac{2}{3}-i.$$

Le long du segment de droite d'extrémités $(0,1)$ et $(0,0)$, $x=0$, $dx=0$; et l'intégrale vaut

$$\int_{y=1}^{0}(0+iy)^2(0+idy)=\int_{y=1}^{0}-iy^2dy=\left[-i\frac{y^3}{3}\right]_1^0=\frac{1}{3}i.$$

Le résultat demandé est donc $=\dfrac{1}{3}+\left(-1+\dfrac{2}{3}i\right)+\left(\dfrac{2}{3}-i\right)+\dfrac{1}{3}i=0.$

Autre méthode. Le carré de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ est une courbe fermée et la fonction $f(z)=z^2$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$, donc d'après le théorème de Cauchy $\displaystyle\oint_C z^2dz=0.$

==

Exercice 8 :

Calculer $\oint_C (z^2+3z)\,dz$ le long

a) du cercle $|z|=2$ de $(2,0)$ à $(0,2)$ dans le sens direct,

b) du segment de droite joignant $(2,0)$ à $(0,2)$,

c) du contour polygonal formé par les segments de droite joignant $(2,0)$ à $(2,2)$ et $(2,2)$ à $(0,2)$.

Solution.

a) L'arc de $(2,0)$ à $(0,2)$ du cercle $|z|=2$ peut être paramétré par $z=2e^{it}, t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Les points $(2,0)$ et $(0,2)$ de l'arc correspondent respectivement à $t=0$ et $t=\frac{\pi}{2}$. L'intégrale donnée a alors pour valeur

$$\int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(2e^{it}\right)^2+3\left(2e^{it}\right)\right\}d\left(2e^{it}\right)=\int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}}\left\{4e^{2it}+6e^{it}\right\}2ie^{it}dt=\int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}}i\left(8e^{3it}+12e^{2it}\right)dt$$
$$=\left[\frac{8}{3}e^{3it}+6e^{2it}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{44}{3}-\frac{8}{3}i.$$

b) Une équation de la droite joignant $(2,0)$ à $(0,2)$ est $y=-x+2$. En remplaçant y par $-x+2$, on obtient

$$\begin{aligned}\oint_C (z^2+3z)\,dz &= \int_{x=0}^{2}\left\{(x+i(-x+2))^2+3(x+i(-x+2))\right\}(dx+id(-x+2))\\ &= \int_{x=0}^{2}(1-i)\left\{((1-i)x+2i)^2+3((1-i)x+2i)\right\}dx\\ &= \left[\frac{1}{3}((1-i)x+2i)^3+\frac{3}{2}((1-i)x+2i)^2\right]_0^2=-\frac{44}{3}-\frac{8}{3}i.\end{aligned}$$

c) Le long du segment de droite d'extrémités $(2,0)$ et $(2,2)$, $x=2$, $dx=0$ et l'intégrale vaut

$$\int_{y=0}^{2}\left\{(2+iy)^2+3(2+iy)\right\}(0+idy)=\left[\frac{1}{3}(2+iy)^3+\frac{3}{2}(2+iy)^2\right]_0^2=-14+\frac{52}{3}i.$$

Le long du segment de droite d'extrémités $(2,2)$ et $(0,2)$, $y=2$, $dy=0$ et l'intégrale vaut

$$\int_{x=2}^{0}\left\{(x+2i)^2+3(x+2i)\right\}(dx+i0)=\left[\frac{1}{3}(x+2i)^3+\frac{3}{2}(x+2i)^2\right]_2^0=-\frac{2}{3}-20i.$$

Le résultat demandé est donc $=\left(-14+\frac{52}{3}i\right)+\left(-\frac{2}{3}-20i\right)=-\frac{44}{3}-\frac{8}{3}i.$

Dans tous les cas l'intégrale vaut $-\frac{44}{3}-\frac{8}{3}i$ car la fonction $f(z)=z^2+3z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

==

Exercice 9 :

Calculer $\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz$ si C désigne **(a)** le cercle $|z|=3$, **(b)** le cercle $|z|=1$.

Solution.

a) L'application de la formule de Cauchy $f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(z)}{z-a}dz$, pour $a=2$ et $f(z)=e^z$ donne

$$f(2) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(z)}{z-2}dz \quad \text{ou} \quad e^2 = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{e^z}{z-2}dz.$$

D'où $\oint\limits_C \frac{e^z}{z-2}dz = 2\pi i e^2$.

b) Le point de singularité $z=2$ est l'extérieur du cercle $|z|=1$, donc d'après le théorème de Cauchy $\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz = 0$.

==

Exercice 10 :

Développer en série de Laurent autour de leurs points singuliers les fonctions suivantes, et préciser la nature des points singuliers.

(a) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, **(b)** $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$.

Solution. **(a)** La fonction $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ a une singularité en $z=0$. Soit $\frac{1}{z}=u$. Alors

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z}} &= e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + ... \\ &= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + ... \end{aligned}$$

La partie principale de la série de Laurent a une infinité de termes, donc $z=0$ est une singularité essentielle.

(b) Les singularités de f sont $z=1$ et $z=2$.

· Série de Laurent autour de $z=1$: Soit $z-1=u$. Alors $z=1+u$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{-1+u} = -\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{1-u} \\ &= -\frac{1}{u}\left(1+u+u^2+u^3+u^4+...\right) \\ &= -\frac{1}{u} - 1 - u - u^2 - u^3 - ... \\ &= -\frac{1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - (z-1)^3 - .... \end{aligned}$$

La plus grande puissance de $\frac{1}{z-1}$ est 1, la singularité en $z=1$ est donc un pôle simple.

· Série de Laurent autour de $z = 2$: Soit $z - 2 = u$. D'où $z = 2 + u$ et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{2+u-1} \cdot \frac{1}{u} = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{1+u} \\
&= \frac{1}{u}\left(1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - ...\right) \\
&= \frac{1}{u} - 1 + u - u^2 + u^3 - ... \\
&= \frac{1}{z-2} - 1 + (z-2) - (z-2)^2 + (z-2)^3 - ....
\end{aligned}$$

La singularité en $z = 2$ est un pôle simple.

===

Exercice 11 **:**

Pour chacune des fonctions suivantes déterminer les pôles et les résidus en ces pôles.

(a) $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2 - z - 2}$, **(b)** $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$, **(c)** $f(z) = \dfrac{z^2+4}{z^3 + 2z^2 + 2z}$.

Solution.

(a) La fonction $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2 - z - 2}$ possède deux pôles simple en $z = -1$ et $z = 2$ [racines de $z^2 - z - 2$].

Le résidu en $z = -1$ est

$$\lim_{z\to -1} (z+1) \frac{2z+1}{z^2 - z - 2} = \lim_{z\to -1} (z+1) \frac{2z+1}{(z+1)(z-2)} = \lim_{z\to -1} \frac{2z+1}{z-2} = \frac{-2+1}{-1-2} = \frac{1}{3}.$$

Le résidu en $z = 2$ est

$$\lim_{z\to 2} (z-2) \frac{2z+1}{z^2 - z - 2} = \lim_{z\to 2} (z-2) \frac{2z+1}{(z+1)(z-2)} = \lim_{z\to 2} \frac{2z+1}{z+1} = \frac{4+1}{2+1} = \frac{5}{3}.$$

(b) On a $\lim\limits_{z\to 0} zf(z) = \lim\limits_{z\to 0} z\dfrac{\sin z}{z^2} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$. Le point singulier $z = 0$ est donc un pôle simple et le résidu en $z = 0$ est $\lim\limits_{z\to 0} zf(z) = 1$.

(c) La fonction $\dfrac{z^2+4}{z^3 + 2z^2 + 2z}$ possède trois pôles simple en $z = 0$, $z = -1 + i$ et $z = -1 - i$ [racines de $z^3 + 2z^2 + 2z$].

Le résidu en $z = 0$ est

$$\lim_{z\to 0} z \frac{z^2+4}{z^3 + 2z^2 + 2z} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2+4}{z^2 + 2z + 2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Remarque. Une autre méthode pour calculer les résidus des pôles simples pour le cas où $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$: Res $(f, a) = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$.

Le résidu en $z = -1 + i$ est

$$\lim_{z\to -1+i} (z - (-1+i)) \frac{z^2+4}{z^3 + 2z^2 + 2z} \overset{ou}{=} \frac{P(-1+i)}{Q'(-1+i)} = \frac{(-1+i)^2 + 4}{3(-1+i)^2 + 4(-1+i) + 2} = -\frac{1}{2}(1 - 3i).$$

Le résidu en $z = -1 - i$ est

$$\lim_{z \to -1-i} (z - (-1 - i)) \frac{z^2 + 4}{z^3 + 2z^2 + 2z} \overset{ou}{=} \frac{P(-1-i)}{Q'(-1-i)} = \frac{(-1-i)^2 + 4}{3(-1-i)^2 + 4(-1-i) + 2} = -\frac{1}{2}(1 + 3i).$$

==