U.S.T.H.B. 2012-2013 Semestre 2 **Math 4 : Analyse complexe**

Faculté de Mathématiques £ **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section G**

Épreuve de TD - 8 may 2013. Durée : 25 minutes

Nom :.. **Matricule :**..

Prénom :.. **Groupe :**..

===

Exercice 1 (5 points) : Déterminer toutes les valeurs de z telles que $e^{iz} = 1 + i$.

Réponse.

Si $w = e^u$ on a $u = \log w$. On obtient alors

$$iz = \log(1+i) \text{ ou } z = \frac{1}{i}\log(1+i) = -i\log(1+i),$$

et donc

$$\begin{aligned} z &= -i\left\{\ln|1+i| + i\arg(1+i)\right\} \\ &= -i\left\{\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right\} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - i\ln\sqrt{2},\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Autre méthode. En écrivant $e^{iz} = e^{(ix-y)} = e^{-y}(\cos x + i\sin x)$, on trouve le même résultat en égalant les parties réelles et imaginaires.

===

Exercice 2 (5 points) : Déterminer $u(x,y)$ et $v(x,y)$ telles que $ze^{2z} = u + iv$.

Réponse. On a

$$\begin{aligned} ze^{2z} &= (x+iy)e^{2x+i2y} = (x+iy)e^{2x}(\cos(2y) + i\sin(2y)) \\ &= e^{2x}(x\cos(2y) - y\sin(2y)) + ie^{2x}(x\sin(2y) + y\cos(2y)). \end{aligned}$$

Alors

$$u(x,y) = e^{2x}(x\cos(2y) - y\sin(2y))$$

et

$$v(x,y) = e^{2x}(x\sin(2y) + y\cos(2y)).$$

==

Exercice 3 (5 points) :

Examiner si la fonction $f(z) = x^3 - y^2 - x + i(3x^2y - y + x)$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

Réponse.

Si les dérivées partielles sont continues dans le domaine indiqué, les équations de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ sont nécessaires et suffisantes pour que $f = u + iv$ soit holomorphe.

On a $u = x^3 - y^2 - x$ et $v = 3x^2y - y + x$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Les équations de Cauchy-Riemann ne sont pas satisfaites, la fonction f est donc n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.