Chapitre 1

Fonctions élémentaires

Sommaire

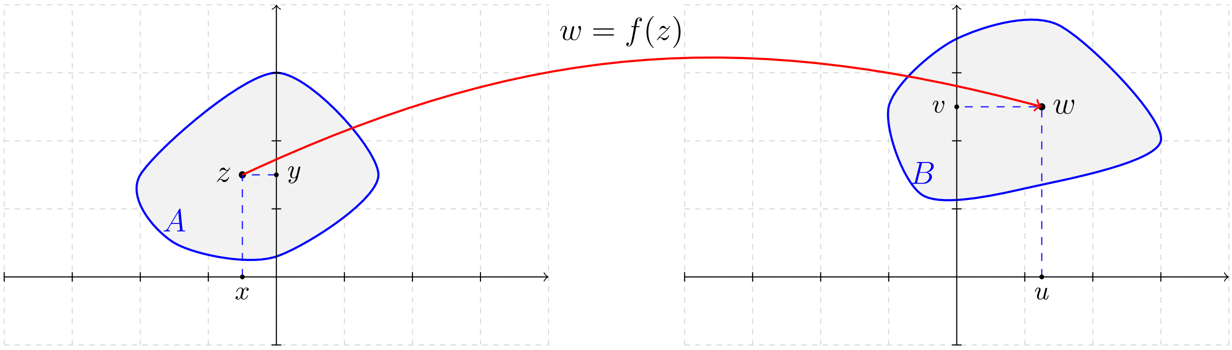
1.1 Fonctions complexes

Définition 7

Soient A et B deux ensembles non vides dans $\mathbb{C}$. Si à chaque valeur $z \in A$, il correspond une ou plusieurs valeurs $w \in B$, on dit que w est une fonction de z et on écrit $w = f(z)$ ou

$$\begin{aligned} f: \quad A &\longrightarrow B \\ z &\longmapsto w = f(z). \end{aligned}$$

La fonction $w = f(z)$ définie une correspondance entre deux plans complexes.



Exemple 5

$z \mapsto w = f(z) = z^2$. Par exemple, la valeur de f en $z = 2i$ est $f(2i) = (2i)^2 = -4$. ■

1.1.1 Fonctions uniformes et multiformes

Définition 8

- Si une seule valeur de w correspond à chaque valeur de z on dira que w est une fonction **uniforme** de z ou que $f(z)$ est uniforme.

- Si plusieurs valeurs de w correspondent à chaque valeur de z, on dira que w est une fonction **multiforme** de z.

Remarque 9

- Une fonction multiforme peut être considérée comme un ensemble de fonctions uniformes, chaque élément de cet ensemble étant appelé une **branche** de la fonction.

- On choisit habituellement un élément comme **branche principale,** ainsi est appelée **détermination principale**. ■

Exemple 6

Si $w = f(z) = z^2$, à toute valeur de z il correspond une seule valeur de w. Donc $f(z) = z^2$ est une fonction uniforme de z. ∎

Exemple 7

Si l'on considère la fonction $w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$, à chaque valeur de z correspondent deux valeurs de w. Donc $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ est une fonction multiforme de z. ∎

1.1.2 Fonctions inverses

Si $w = f(z)$, on peut aussi considérer z comme fonction de w, ce qui peut s'écrire sous la forme $z = g(w) = f^{-1}(w)$. La fonction f^{-1} est appelée la fonction inverse de f.

Exemple 8

La fonction $g(z) = z^{\frac{1}{2}}$ est la fonction inverse de la fonction $f(z) = z^2$. ∎

1.1.3 Transformations

Définition 10

Si $z = x + iy$, on peut écrire $f(z)$ comme $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Les fonctions u et v sont appelées, respectivement, **partie réelle** et **partie imaginaire** de f. On note

$$u = \operatorname{Re}(f) \quad \text{et } v = \operatorname{Im}(f).$$

Exemple 9

$f(z) = z^3 = (x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + (3yx^2 - y^3)\, i.$

Les parties réelle et imaginaire sont $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 \quad$ et $\; v(x, y) = 3yx^2 - y^3$. ∎

1.1.4 Limites

Définition 11

Soit f une fonction complexe à une variable complexe, on dit que f admet une limite l en $z_0 = x_0 + iy_0$, et on note $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

Exemple 10

Soit $f(z) = z^2$. Par exemple $\lim\limits_{z \to i} f(z) = f(i) = i^2 = -1$. ∎

Proposition 12

Posons $l = a + ib$ et $f = u + iv$ où a, b, u et v sont des réels, alors

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \Longleftrightarrow \left\{ \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = a \text{ et } \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = b \right\}.$$

Remarque 13

Quand la limite d'une fonction existe, elle est unique. Si la fonction f est multiforme la limite de f quand $z \to z_0$ peut dépendre de la branche choisie. ∎

1.1.5 Continuité

Définition 14

Soit f une fonction complexe uniforme. La fonction f est dite continue en z_0 si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z)$. Une fonction f est dite continue dans une région du plan complexe si elle est continue en tous les points de cette région.

Exemple 11

Soit f la fonction définie par

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{si } z \neq i \\ 0 & \text{si } z = i. \end{cases}$$

Quand z tend vers i, $f(z)$ se rapproche de $i^2 = -1$, *i.e.* $\lim\limits_{z \to i} f(z) = i^2 = -1$. Mais $f(i) = 0$. Donc $\lim\limits_{z \to i} f(z) \neq f(i)$ et la fonction n'est pas continue en $z = i$. ∎

Remarque 15

La fonction $f = u + iv$ est continue dans un domaine si et seulement si la partie réelle u et la partie imaginaire v sont continues. ∎

1.2 Fonctions élémentaires

1.2.1 Les fonctions polynômiales

Les fonctions polynômiales sont définies par

$$f(z) = P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

où $a_n \neq 0,\ a_0, a_1, ... a_n$ sont des constantes complexes et n un entier positif appelé le **degré** du polynôme $P(z)$.

1.2.2 Les fractions rationnelles

Les fractions rationnelles sont définies par

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

où P et Q sont des polynômes. Le cas particulier $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, où $ad - bc \neq 0$ est appelé transformation **homographique**.

1.2.3 Les fonctions exponentielles

Les fonctions exponentielles sont définies par

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

formule dans laquelle e est la base des logarithmes népériens, $e \simeq 2,718$. Si a est réel et positif on définit

$$a^z = e^{z \operatorname{Log} a}.$$

Les fonctions exponentielles complexes ont des propriétés analogues à celles des fonctions exponentielles réelles. Ainsi par exemple $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$, $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$.

1.2.4 Fonctions trigonométriques

Nous définirons les fonctions trigonométriques ou **circulaires**, $\sin z$, $\cos z$, etc., à l'aide des fonctions exponentielles de la manière suivante.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)} \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

La plupart des propriétés des fonctions trigonométriques réelles sont encore valables dans le cas complexe. Ainsi par exemple $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$, ...

1.2.5 Les fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont définies comme suit :

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \frac{2}{e^{z} + e^{-z}} \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{sh} z} = \frac{2}{e^{z} - e^{-z}}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}} \qquad \operatorname{coth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^{z} + e^{-z}}{e^{z} - e^{-z}}.$$

Les propriétés suivantes sont encore vérifiées :
$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$, $\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$, ...

Les fonctions trigonométriques (ou circulaires) et les fonctions hyperboliques sont liées par les relations suivantes :

$$\sin(iz) = i \operatorname{sh} z \qquad \cos(iz) = \operatorname{ch} z \qquad \operatorname{tg}(iz) = i \operatorname{th} z$$

$$\operatorname{sh}(iz) = i \sin z \qquad \operatorname{ch}(iz) = \cos z \qquad \operatorname{th}(iz) = i \operatorname{tg} z.$$

1.2.6 Fonctions logarithmiques

La fonction $f(z) = \operatorname{Log} z$, $z \neq 0$ est définie comme l'inverse de la fonction exponentielle e^z.

$$w = \operatorname{Log} z \Leftrightarrow z = e^{w}.$$

Question : Pour un nombre complexe z donné, le nombre w qui vérifie $z = e^w$ est-il unique?

Réponse : Posons $z = x + iy$ et $w = u + iv$. On a

$$\begin{aligned} z = e^w \quad &\Leftrightarrow \quad x + iy = e^{u+iv} = e^u (\cos v + i \sin v) \\ &\Leftrightarrow \quad \{|z| = e^u \;\text{ et }\; v = \operatorname{Arg} z + 2k\pi,\; k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

D'où w n'est pas unique car

$$w = \operatorname{Log} z = u + iv = \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi),\; k \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 16

La fonction Log z, $z \neq 0$ est une fonction multiforme définie par

$$\begin{aligned} \mathit{Log}\, z &= \ln|z| + i \arg z \\ &= \ln|z| + i(\mathit{Arg}\, z + 2k\pi),\; k \in \mathbb{Z},\; \textit{où } -\pi < \mathit{Arg}\, z \leq \pi. \end{aligned}$$

Remarque 17

La détermination **principale** ou valeur principale de Log z est souvent définie par

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z,\; \text{où } -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi. \qquad \blacksquare$$

Exemple 12

$\operatorname{Log}(-1) = \ln|-1| + i \arg(-1) = i(\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pour la détermination principale, $\operatorname{Log}(-1) = i\pi$. ▪

Les propriétés suivantes sont vérifiées (modulo$[2\pi i]$) :

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 \quad ; \quad \operatorname{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Log} z_1 - \operatorname{Log} z_2 \quad ; \quad \operatorname{Log}(z^n) = n \operatorname{Log} z.$$

Exemple 13

Utilisons la détermination principale du logarithme :

$$\operatorname{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i \operatorname{Arg}(1+i) = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i,$$

$$\operatorname{Log}(-1) = \ln|-1| + i \operatorname{Arg}(-1) = \pi i,$$

$$\operatorname{Log}((1+i)(-1)) = \operatorname{Log}(-1-i) = \ln|-1-i| + i \operatorname{Arg}(-1-i) = \ln\sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}i.$$

On remarque que $\operatorname{Log}((1+i)(-1)) = \operatorname{Log}(1+i) + \operatorname{Log}(-1) - 2\pi i$. ▪

1.2.7 La fonction z^α

La fonction z^α, $\alpha \in \mathbb{C}$, est définie par

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z}.$$

De même si $f(z)$ et $g(z)$ sont deux fonctions données, de z, on peut définir

$$f(z)^{g(z)} = e^{g(z) \operatorname{Log} f(z)}.$$

En général de telles fonctions sont multiformes.

Exemple 14

$i^{-i} = e^{-i \operatorname{Log} i} = e^{-i(\ln|i| + i \arg(i))} = e^{-i^2\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

La détermination principale est $i^{-i} = e^{\frac{\pi}{2}}$. ■

Remarque 18

On a $(z^\alpha)^k = z^{\alpha k}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais $(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\beta}$ dans le cas général si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. ■

Exemple 15

On a $\left((-i)^2\right)^i = (-1)^i = e^{i \operatorname{Log}(-1)} = e^{i(\ln|-1| + i \arg(-1))} = e^{i^2(\pi + 2k\pi)} = e^{-\pi - 2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais $(-i)^{2i} = e^{2i \operatorname{Log}(-i)} = e^{2i(\ln|-i| + i \arg(-i))} = e^{2i^2\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = e^{\pi - 4k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

1.2.8 Fonctions trigonométriques inverses

$$\operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \qquad \operatorname{Arcos} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right) \qquad \operatorname{Arcotg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{z + i}{z - i}\right).$$

1.2.9 Fonctions hyperboliques inverses

$$\operatorname{Argsh} z = \operatorname{Log}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right) \qquad \operatorname{Argch} z = \operatorname{Log}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$\operatorname{Argth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Log}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) \qquad \operatorname{Argcoth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Log}\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right).$$