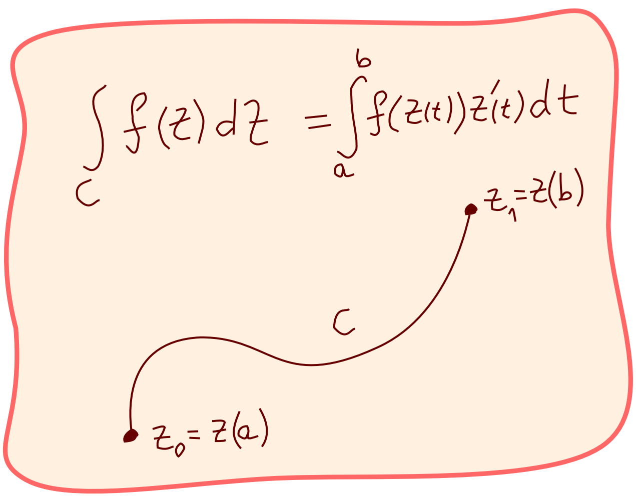
Chapitre 3

Intégration dans le domaine complexe

Sommaire



3.1 Chemins et courbes dans le plan complexe

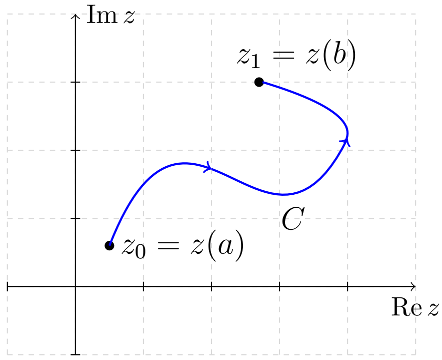
Définition 32

Un **chemin** est défini comme étant une fonction continue d'un intervalle réel $[a, b]$, $a < b$, vers le plan complexe.

$$\begin{aligned} [a, b] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto z(t) = x(t) + iy(t). \end{aligned}$$

Ses points initial et final sont $z_0 = z(a)$ et $z_1 = z(b)$.

La fonction $t \mapsto z(t)$ est souvent notée $t \mapsto \gamma(t)$.

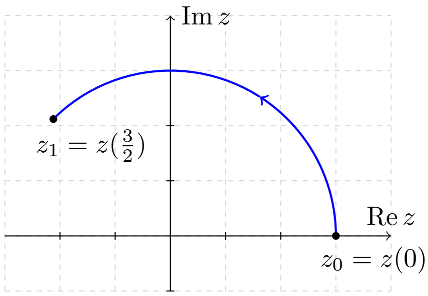


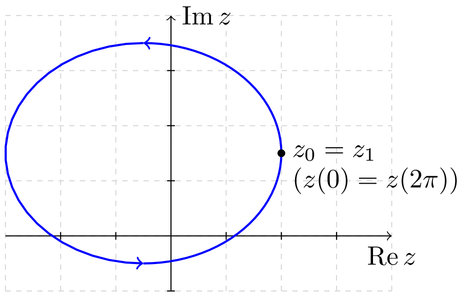
Définition 33

L'image $C = \{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [a, b]\}$ s'appelle **courbe** dans le plan complexe paramétrée par la fonction $t \mapsto z(t)$.

Exemple 32

Les fonctions $z(t) = 3\cos t + 3i \sin t,\ 0 \le t \le \frac{3\pi}{2}$ et $z(t) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\cos t + i\left(\frac{3}{2} + \sin t\right),\ 0 \le t \le 2\pi$ définies des chemins dans le plan complexe.





$\boxed{z(t) = 3\cos t + 3i \sin t,\ 0 \le t \le \frac{3\pi}{4}.}$ $\boxed{z(t) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\cos t + i\left(\frac{3}{2} + 2\sin t\right),\ 0 \le t \le 2\pi.}$ ■

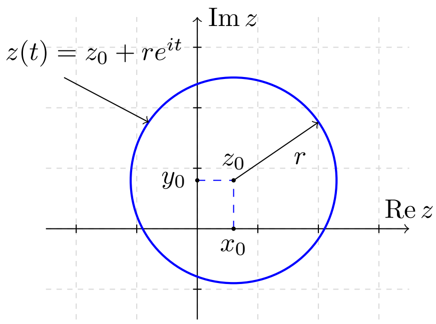
Exemple 33

Le cercle de centre z_0 et de rayon r est une courbe paramétrée par la fonction

$$z(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t),\ 0 \le t \le 2\pi,$$

ou

$$z(t) = z_0 + re^{it},\ 0 \le t \le 2\pi.$$



Cercle de centre z_0 et de rayon r

■

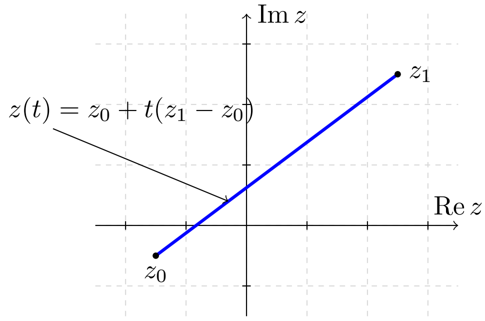
Exemple 34

Le segment d'extrémités z_0 et z_1 noté $[z_0, z_1]$ est une courbe paramétrée par la fonction

$$z(t) = z_0(1-t) + tz_1, \ 0 \leq t \leq 1,$$

ou

$$z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0), \ 0 \leq t \leq 1.$$

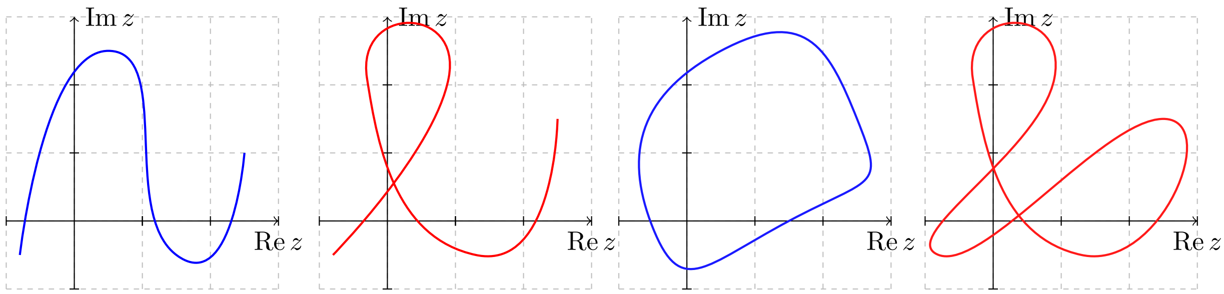


Segment d'extrémités z_0 et z_1 ■

Définition 34

1. Si les points initial et final d'un chemin coïncident, il est appelé **chemin fermé** ou **lacet**.
2. On dit qu'un chemin est **simple** si ne se recoupe pas lui-même *i.e.* il n'a pas de points doubles.
3. Toute courbe fermée et simple, est appelée courbe de **Jordan**.

Exemple 35



Chemin non fermé et simple | Chemin non fermé et non simple | Chemin fermé et simple | Chemin fermé et non simple ■

3.2 Intégration le long d'une courbe

Soit D un domaine du plan complexe $\mathbb{C}$ et soit C une courbe paramétrée par un chemin

$$\begin{aligned} z : \ [a, b] &\to D \\ t &\mapsto z(t), \end{aligned}$$

tel que $z'(t)$ existe et continue. Soit f une fonction complexe continue définie sur D

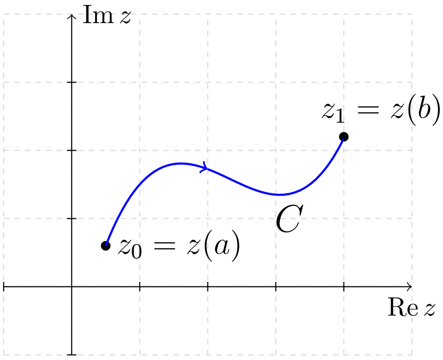
$$\begin{aligned} f : \ D &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z). \end{aligned}$$

Définition 35

On définit l'intégrale de f le long de la courbe C par

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt.$$

Si la courbe est fermée et orientée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ↺ on note $\oint_C f(z)\,dz$ au lieu de $\int_C f(z)\,dz$.



Remarque 36

1. L'intégrale le long d'une courbe est aussi appelée intégrale le long d'un **chemin**, ou intégrale **curviligne** complexe.

2. Le sens inverse des aiguilles d'une montre est aussi appelé le sens positif ou sens direct. ∎

Exemple 36

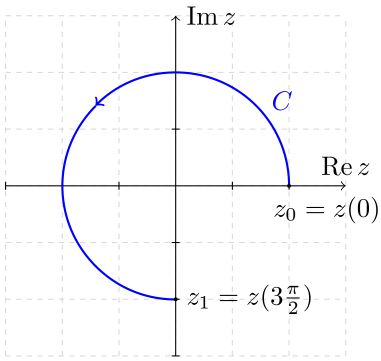
Soit C l'arc $\left\{z(t) \in \mathbb{C} \text{ tel que } z(t) = 2e^{it}, 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Évaluons l'intégrale $\int_C z^2 dz$.

On a $dz = z'(t)\,dt = 2ie^{it}dt$. Alors

$$\int_C z^2 dz = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(2e^{it}\right)^2 2ie^{it}dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 8ie^{3it}dt$$

$$= \left[\frac{8}{3}e^{3it}\right]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{8}{3}e^{6i\pi} - \frac{8}{3}e^{\frac{9}{2}i\pi} = \frac{8}{3} - \frac{8}{3}i.$$



∎

Proposition 37

Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ et $z(t) = x(t) + iy(t)$, l'intégrale $\int_C f(z)\,dz$ peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz &= \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C (udx - vdy) + i(vdx + udy) \\
&= \int_a^b \{u(x(t),y(t))\,x'(t) - v(x(t),y(t))\,y'(t)\}\,dt \\
&\quad + i\int_a^b \{v(x(t),y(t))\,x'(t) + u(x(t),y(t))\,y'(t)\}\,dt.
\end{aligned}$$

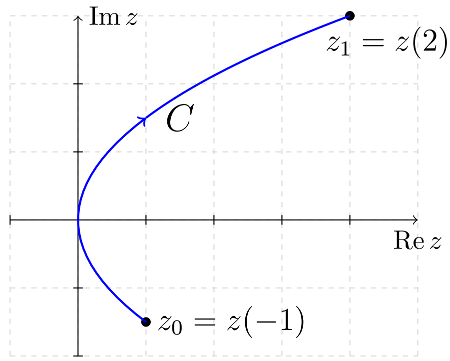
Exemple 37

Calculer $\int_C f(z)\,dz$ où $f(z) = i\bar{z} = y + ix$ et

$$C = \left\{ \left(t^2, \tfrac{3}{2}t\right) \in \mathbb{R}^2,\ t \in [-1, 2] \right\}.$$

On a $x(t) = t^2$, $y(t) = \frac{3}{2}t$ et

$$dz = dx + idy = (x'(t) + iy'(t))\,dt = \left(2t + \tfrac{3}{2}i\right) dt.$$



Alors

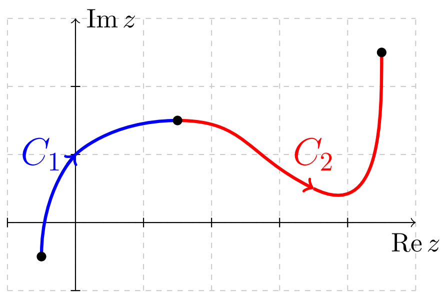
$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz &= \int_{t=-1}^{t=2} (y(t) + ix(t))\,(x'(t) + iy'(t))\,dt \\
&= \int_{-1}^{2} \left(t + it^2\right)\left(2t + \tfrac{3}{2}i\right) dt = \int_{-1}^{2} \left(\tfrac{1}{2}t^2 + i\left(2t^3 + \tfrac{3}{2}t\right)\right) dt \\
&= \left[\tfrac{1}{6}t^3 + i\left(\tfrac{1}{2}t^4 + \tfrac{3}{4}t^2\right)\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2} + \frac{39}{4}i.
\end{aligned}$$

■

3.2.1 Propriétés

Soit C une courbe dans le plan complexe. On note par $-C$, la courbe C orientée dans son sens inverse. On suppose que $C = C_1 \cup C_2$ avec le point final de la courbe C_1 coïncide avec le point initial de la courbe C_2.

Si f et g sont intégrables le long de C, alors



1. $\displaystyle\int_C (f(z) + g(z))\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz.$

2. $\displaystyle\int_C \alpha f(z)\,dz = \alpha \int_C f(z)\,dz$ où α est une constante dans $\mathbb{C}$.

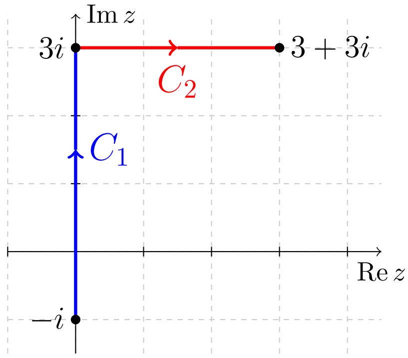
3. $\displaystyle\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz.$

4. $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1 \cup C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.$

Exemple 38

Évaluer $\int_C \bar{z}dz$ où C est la courbe formée des segments joignant $-i$ à $3i$ et $3i$ à $3+3i$.

Soit $C_1 = \{(4t-1)\,i \in \mathbb{C},\ 0 \leq t \leq 1\}$ le segment joignant $-i$ à $3i$ et $C_2 = \{3t+3i \in \mathbb{C},\ 0 \leq t \leq 1\}$ le segment joignant $3i$ à $3+3i$.



Sur le segment C_1, on a $z(t) = (4t-1)\,i$, $dz = z'(t)\,dt = 4idt$ et

$$\int_{C_1} \bar{z}dz = \int_0^1 -(4t-1)\,i\,(4idt) = \int_0^1 (16t-4)\,dt = \left[8t^2 - 4t\right]_0^1 = 4.$$

Sur le segment C_2, on a $z(t) = 3t+3i$, $dz = z'(t)\,dt = 3dt$ et

$$\int_{C_2} \bar{z}dz = \int_0^1 -(4t-1)\,i\,(3dt) = \int_0^1 (-12t+3)\,idt = \left[\left(-6t^2+3t\right)i\right]_0^1 = -3i.$$

Le résultat demandé est $\int_C \bar{z}dz = \int_{C_1} \bar{z}dz + \int_{C_2} \bar{z}dz = 4 - 3i.$ ■

Longueur d'une courbe

Soit C une courbe paramétrée par un chemin

$$\begin{aligned} z:\ [a,b] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto z(t), \end{aligned}$$

tel que $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ existe et continue.

La **longueur** L_C de la courbe C est définie comme étant

$$\boxed{L_C = \int_a^b |z'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.}$$

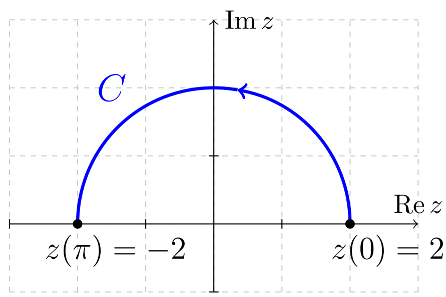
Exemple 39

Trouver la longueur du demi-cercle

$$C = \left\{z(t) \in \mathbb{C} \text{ où } z(t) = 2e^{it},\ t \in [0,\pi]\right\}.$$

On a $z'(t) = 2ie^{it}$ et donc $|z'(t)| = |2ie^{it}| = 2$.

D'où $L_C = \int_0^\pi 2dt = [2t]_0^\pi = 2\pi$.



■

Théorème d'estimation

Soit f une fonction complexe continue définie sur un domaine D du plan complexe $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f: \quad D &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z). \end{aligned}$$

Soit C une courbe paramétrée par un chemin

$$\begin{aligned} z: \quad [a,b] &\to D \\ t &\mapsto z(t), \end{aligned}$$

tel que $|f(z(t))| \leq M$, $\forall t \in [a,b]$, *i.e.* $|f(z)|$ est bornée sur C par une constante réelle M. Alors

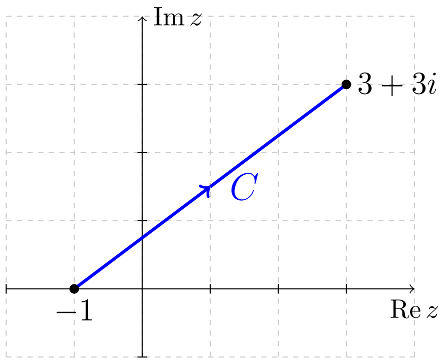
$$\boxed{\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq \int_C |f(z)|\ |dz| \leq M\ L_C,}$$

où, par définition,

$$\int_C |f(z)|\ |dz| = \int_a^b |f(z(t))|\ |z'(t)|\,dt$$

et L_C est la longueur de la courbe C.

Exemple 40



Soit C le segment d'extrémités -1 et $3+3i$ qui est définie par

$$C = \{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0,1]\ \text{ où } z(t) = -1 + 4t + 3it\}.$$

Vérifier le théorème d'estimation pour $f(z) = \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z = xy$.

On a $dz = z'(t)\,dt = (4+3i)\,dt$ et donc d'une part

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^1 (-1+4t)(3t)(4+3i)\,dt\right| = \left|10 + \frac{15}{2}i\right| = \frac{25}{2} = 12,5.$$

D'autre part

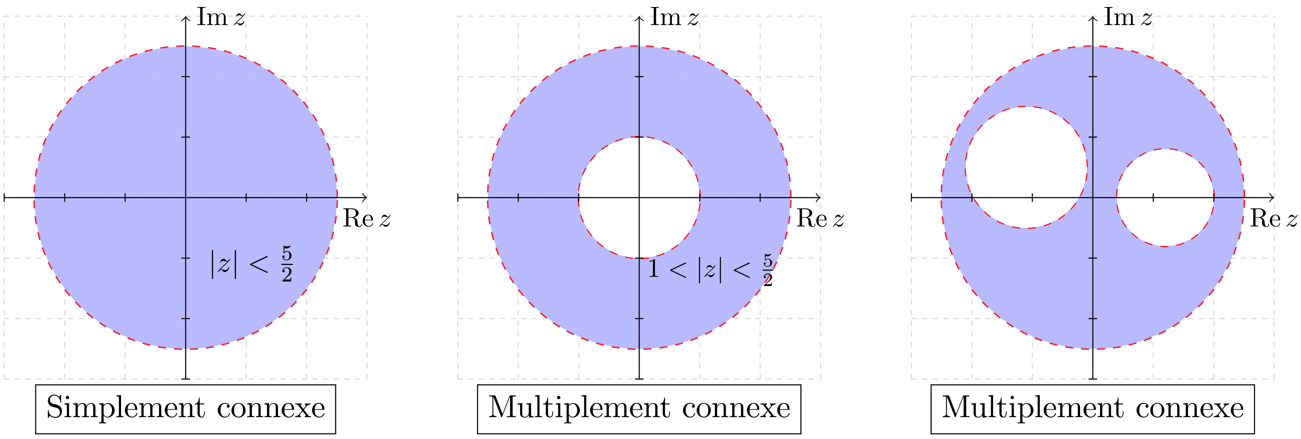
$$\int_C |f(z)|\ |dz| = \int_0^1 |f(z(t))|\ |z'(t)|\,dt = \int_0^1 |(-1+4t)(3t)|\,(5)\,dt = \frac{205}{16} = 12,8125.$$

Ainsi $M = \sup\limits_{0\leq t\leq 1} |(-1+4t)(3t)| = 9$ et $L_C = 5$.
Alors le théorème d'estimation est vérifié car $12,5 \leq 12,8125 \leq 45$. ∎

3.3 Théorèmes de Cauchy

3.3.1 Domaines simplement ou multiplement connexes

Un domaine D du plan complexe est dit **simplement connexe** si toute courbe fermée simple de D peut être réduite par déformation continue à un point sans quitter D.
Dans le cas contraire D est dit **multiplement connexe**.

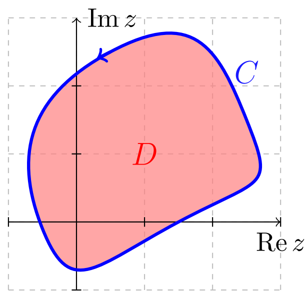


Intuitivement, un domaine sans trous est simplement connexe mais s'il possède au moins un seul trou il est multiplement connexe.

3.3.2 Théorème de Cauchy

Soit f une fonction **holomorphe** dans un domaine connexe D et sur sa frontière C. Alors

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 0.}$$

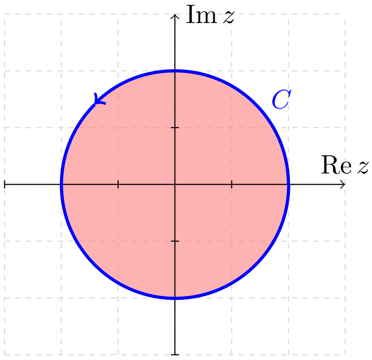


Ce théorème fondamental est souvent appelé **théorème de Cauchy**, il est à la fois valable pour des domaines simplement connexes ou multiplement connexes.

Exemple 41

Soit le cercle de centre 0 et de rayon 2,

$$C = \left\{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0, 2\pi] \text{ où } z(t) = 2e^{it}\right\}.$$



Calculer $\oint_C z dz$.

On a $dz = z'(t)\, dt = 2ie^{it}dt$, alors

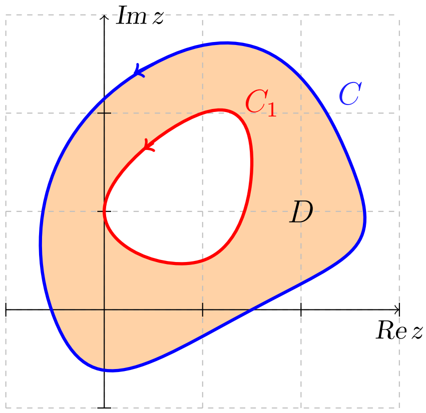
$$\oint_C z dz = \int_0^{2\pi} 2e^{it}\left(2ie^{it}dt\right) = 4i\int_0^{2\pi} e^{2it}dt = \left[2e^{2it}\right]_0^{2\pi} = 2 - 2 = 0.$$

■

Proposition 38
*Soit f une fonction **holomorphe** dans un domaine connexe limité par deux courbes fermées simples C et C_1 et sur ces courbes. Alors*

$$\boxed{\oint_C f(z)\, dz = \oint_{C_1} f(z)\, dz.}$$

où C et C_1 sont décrites dans le sens positif relatif à leur intérieur.



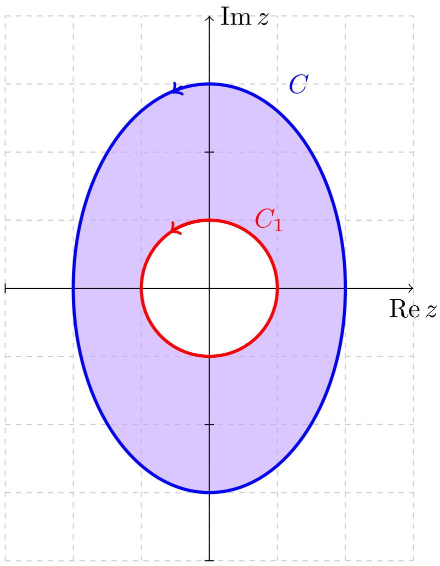
Exemple 42

Calculer $\oint_C \frac{1}{z}dz$, où C est l'ellipse définie par

$$C = \{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0, 2\pi] \text{ où } z(t) = 2\cos t + 3i \sin t\}.$$

La fonction $z \longmapsto \frac{1}{z}$ est holomorphe dans le domaine limité par les courbes C et C_1 et sur ces courbes, où C_1 est le cercle de centre 0 et de rayon 1

$$C_1 = \left\{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0, 2\pi] \text{ où } z(t) = e^{it}\right\}.$$



Alors d'après la proposition précédente

$$\oint_C \frac{1}{z}dz = \oint_{C_1} \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} d\left(e^{it}\right) = \int_0^{2\pi} idt = [it]_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

■

3.3.3 Primitives et intégration

Si f et F sont **holomorphes** dans un domaine connexe D et telles que $F'(z) = f(z)$, alors F est appelée intégrale indéfinie ou anti-dérivée ou primitive de f et est notée

$$F(z) = \int f(z)\, dz.$$

Exemple 43

On a $\frac{d}{dz}\left(3z^2 - 4\sin z\right) = 6z - 4\cos z$, alors

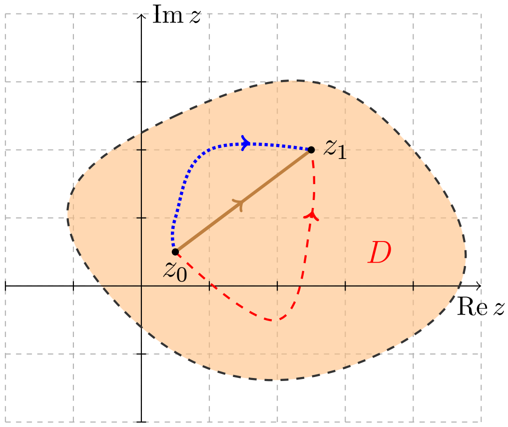
$$\int (6z - 4\cos z)\, dz = 3z^2 - 4\sin z + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

La fonction $z \mapsto 3z^2 - 4\sin z$ est une primitive de $z \mapsto 6z - 4\cos z$. ▪

Théorème fondamental de l'intégration

Soient f et F deux fonctions **holomorphes** dans un domaine connexe D telles que $F'(z) = f(z)$. Si z_0 et z_1 sont deux points quelconques de D, alors pour toute courbe C de point initial z_1 et de point final z_2, on a

$$\boxed{\int_C f(z)\, dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz = [F(z)]_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0).}$$



Cela signifie que si f est holomorphe alors la valeur de l'intégrale est indépendante du chemin suivi pour aller de z_0 à z_1.

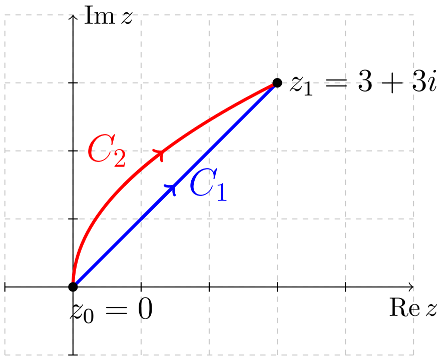
Exemple 44

Évaluer $\int_C 2z dz$ de $z_0 = 0$ à $z_1 = 3+3i$ le long de la parabole

$$C_1 = \left\{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0,3] \text{ où } z(t) = \tfrac{1}{3}t^2 + it\right\}$$

et le long du segment de droite

$$C_2 = \{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0,1] \text{ où } z(t) = 3t + 3it\}.$$



Sur la parabole C_1, on a $z(t) = \frac{1}{3}t^2 + it$, $dz = z'(t)\, dt = \left(\frac{2}{3}t + i\right) dt$ et

$$\int_{C_1} 2z dz = \int_0^3 2\left(\tfrac{1}{3}t^2 + it\right)\left(\tfrac{2}{3}t + i\right) dt = \left[\left(\tfrac{1}{3}t^2 + it\right)^2\right]_0^3 = 18i.$$

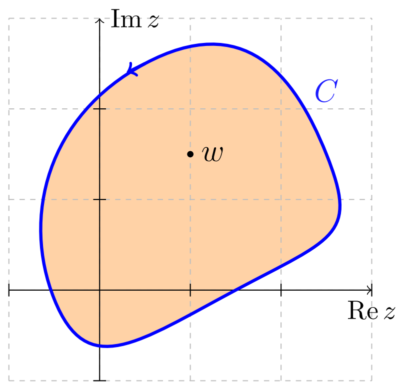
Sur le segment C_2, on a $z(t) = 3t + 3it$, $dz = z'(t)\,dt = (3+3i)\,dt$ et

$$\int_{C_2} 2z dz = \int_0^1 2(3t+3it)(3+3i)\,dt = \left[(3t+3it)^2\right]_0^1 = 18i.$$

Par le théorème fondamental de l'intégration $\int\limits_C 2zdz = \int\limits_0^{3+3i} 2zdz = [z^2]_0^{3+3i} = 18i.$

Nous observons comment il est plus facile d'évaluer ces intégrales en utilisant une primitive, au lieu de paramétrer les chemins d'intégration. ▪

3.3.4 Formule intégrale de Cauchy



Soit f une fonction **holomorphe** à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C, soit w un point intérieur à C, alors

$$\boxed{f(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(z)}{z-w}dz.}$$

où la courbe C est décrit dans le sens direct.

De même la n-ième dérivée de f en w est donnée par

$$\boxed{f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}dz, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.}$$

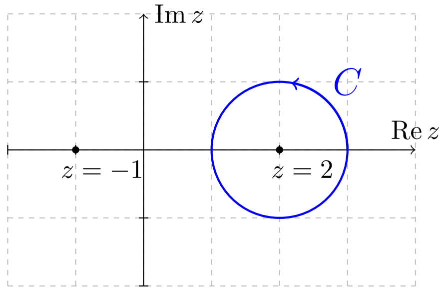
- Les deux formules précédentes sont appelées formules intégrales de Cauchy et sont très remarquables car ils montrent que si une fonction f est connue sur la courbe fermée simple C, alors ses valeurs et les valeurs de toutes ses dérivées peuvent être calculées en tout point situé à l'intérieur de C.

- Si une fonction de la variable complexe admet une dérivée première dans un domaine simplement connexe D, toutes ses dérivées d'ordre supérieur existent dans D.

  Ceci n'est pas nécessairement vrai pour les fonctions de la variable réelle.

Exemple 45

Utiliser la formule intégrale de Cauchy pour évaluer $\oint\limits_C \frac{1}{(z-2)(z+1)}dz$ le long du cercle $C = \{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0, 2\pi]$ où $z(t) = 2 + e^{it}\}$.



La fonction $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z+1}$ est holomorphe à l'intérieur du cercle C et sur C, alors d'après la formule intégrale de Cauchy avec $w = 2$, on a

$$\oint\limits_C \frac{1}{(z-2)(z+1)}dz = \oint\limits_C \frac{f(z)}{z-2}dz = 2\pi i f(2) = 2\pi i \frac{1}{2+1} = \frac{2}{3}\pi i. \qquad \blacksquare$$

Dans ce qui suit on énonce quelques théorèmes importants qui sont des conséquences des formules intégrales de Cauchy.

Inégalité de Cauchy

Si f est holomorphe à l'intérieur du cercle C et sur C, où C désigne le cercle d'équation $|z - z_0| = r$, alors

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{Mn!}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

M désignant une constante telle que $|f(z)| < M$ sur C, i.e. M est une borne supérieure de $|f(z)|$ sur C.

Théorème de Liouville

Supposons que quel que soit z dans le plan complexe

(a) f est holomorphe **(b)** f est bornée, i.e. $|f(z)| < M$, où M désigne une constante.

Alors f est constante.

Théorème fondamental de l'algèbre

Toute équation algébrique $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, possède exactement n racines, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité.