UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE[1]

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

DÉPARTEMENT D'ANALYSE

Notes de Cours du module

Analyse Complexe (Math 4)

Par

LAADJ Toufik[2]

Pour

Deuxième année Licence
Domaine : Sciences et Technologies

Février 2014

[1] USTHB : Bab Ezzouar Alger, Algérie.
[2] Page Web : http://perso.usthb.dz/~tlaadj/

Table des matières

Description du Cours

Objectif du Cours

L'objectif du module Analyse Complexe (Math 4) est de maîtriser les concepts et les résultats fondamentaux de la théorie des fonctions complexes de variables complexes de manière à pouvoir les utiliser dans d'autre cours.
Ces notes de cours donnent les principales définitions et les résultats fondamentaux, illustrés par des exemples.

Contenu du Cours

- Les nombres complexes
- Fonctions complexes
- Dérivation complexe, équations de Cauchy-Riemann
- Intégration complexe, Théorème de Cauchy
- Séries infinies, séries de Taylor, séries de Laurent
- Théorème des résidus

Résultats d'apprentissage

À la fin du cours, l'étudiant doit avoir une bonne compréhension de la théorie des fonctions complexes à variable complexe et devrait être en mesure d'appliquer ces connaissances pour résoudre les exercices dans une variété de contextes.
En particulier, l'étudiant doit être capable de :

- Comprendre ce qu'une dérivation complexe est.
- Citer, tirer et appliquer les équations de Cauchy-Riemann.
- Effectuer l'intégration curviligne de fonctions complexes.
- Comprendre et appliquer le théorème de Cauchy et la formule intégrale de Cauchy
- Étudier les propriétés de convergence d'une série de puissance complexe.
- Appliquer les théorèmes de Taylor et de Laurent pour obtenir des développements en série de puissance.
- Identifier et classifier les singularités de fonctions complexes et trouver des résidus.
- Tirer et appliquer le théorème des résidus pour calculer des intégrales réelles en utilisant des résidus.

Chapitre 0

Les nombres complexes

Sommaire

0.1 L'ensemble des nombres complexes

Question : Trouver un nombre réel solution de l'équation algébrique $x^2 + 1 = 0$.

Réponse : Il n'existe pas de nombre réel x qui soit solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$.

Pour donner des solutions à cette équation et à des équations semblables, on introduit un ensemble plus grand que celui des nombres réels. On appelle cet ensemble les nombres complexes.

Définition 1

Un nombre complexe z s'écrit sous la forme dite algébrique :

$$z = x + iy \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des nombres réels,}$$

et i est appelé l'unité imaginaire, a la propriété $i^2 = -1$.

- Le nombre x est appelée la partie réelle de z, on note $x = \mathrm{Re}\,(z)$.
- Le nombre y est appelée la partie imaginaire de z, on note $y = \mathrm{Im}\,(z)$.
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Remarque 2

a) Deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si

$$\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z') \text{ et } \mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z').$$

b) Si $y = 0$ on dit que z est réel, si $x = 0$ on dit que z est un **imaginaire pur**.

c) Le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$ est appelé le conjugué de z.

0.1.1 Opérations sur les nombres complexes

- Addition : $(x + yi) + (u + vi) = (x + u) + (y + v)\,i$.
- Soustraction : $(x + yi) - (u + vi) = (x - u) + (y - v)\,i$.
- Multiplication : $(x + yi)\,(u + vi) = xu + xvi + yui + yvi^2 = xu - yv + (xv + yu)\,i$.
- Division : $\dfrac{x + yi}{u + vi} = \dfrac{x + yi}{u + vi} \cdot \dfrac{u - vi}{u - vi} = \dfrac{xu - xvi + yui - yvi^2}{u^2 + v^2} = \dfrac{xu + yv}{u^2 + v^2} + \dfrac{yu - xv}{u^2 + v^2} i$.

Remarque 3

Soient z et w deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes :

(1) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ **(2)** $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ **(3)** $\overline{\overline{z}} = z$ **(4)** $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z)$ **(5)** $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}\,(z)\,i$.

0.1.2 Valeur absolue (ou module)

Définition 4

La valeur absolue ou module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est définie par

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemple 1

$|-3 + 4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$ ∎

Si z et w sont deux nombres complexes, on a les propriétés suivantes :

(1) $|zw| = |z|\,|w|$ **(2)** $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|},\ w \neq 0$ **(3)** $|\overline{z}| = |z|$ **(4)** $z\,\overline{z} = |z|^2$.

(5) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (inégalité triangulaire) **(6)** $|z - w| \geq |z| - |w|$.

Remarque 5

On a les propriétés suivantes :

(1) $\sqrt{x^2} = |x|$ et $x^2 = |x|^2$ si $x \in \mathbb{R}$ **(2)** $z^2 \neq |z|^2$ si $\mathrm{Im}\,(z) \neq 0$.

(3) $|z| = 0 \iff z = 0$ **(4)** $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.

Remarque 6

Si z et w sont deux nombres complexes tels que $w \neq 0$, alors on a :

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{z\,\overline{w}}{|w|^2}.$$

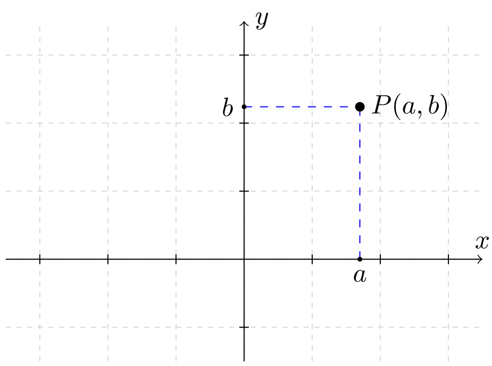
Exemple 2

$\dfrac{2 + 3i}{1 - 2i} = \dfrac{(2 + 3i)\,(1 + 2i)}{1^2 + (-2)^2} = \dfrac{-4}{5} + \dfrac{7}{5}i.$ ∎

0.2 Représentation graphique des nombres complexes

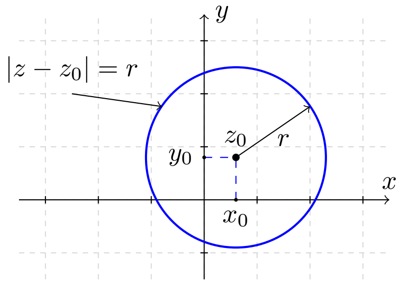
Un nombre complexe $a + ib$ pouvant être considéré comme un couple ordonné de nombres réels, nous pouvons représenter de tels nombres par des points d'un plan des xy appelé **plan complexe**.

À chaque nombre complexe $z = a + ib$ correspond un point $P\,(a, b)$ du plan.



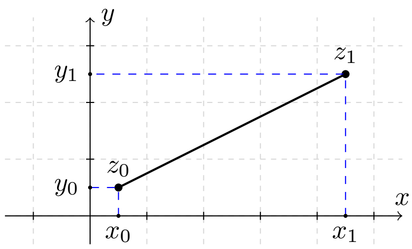
0.2.1 Courbes dans le plan complexe

Cercle



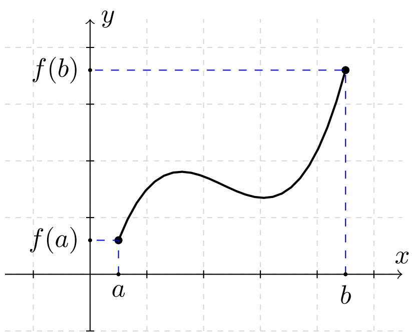
Le cercle de rayon r et de centre $z_0 = x_0 + iy_0$ est défini par l'équation $|z - z_0| = r$.

Segments



Le segment de droite reliant deux points complexes z_0 et z_1 est l'ensemble des points
$\{z \in \mathbb{C} \ / \ z = (1-t)\, z_0 + t z_1, \ t \in [0,1]\}$.

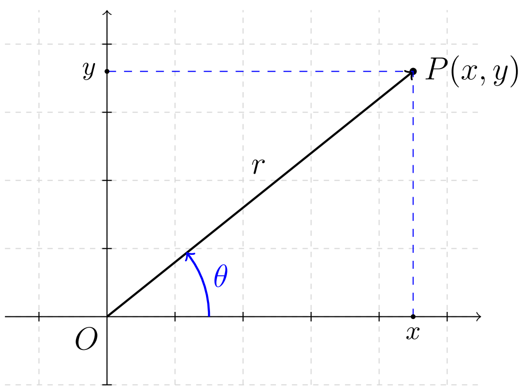
Courbes



En général, une courbe $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ où f est une fonction continue, correspond à l'ensemble de points

$$\{z \in \mathbb{C} \ / \ z = x + if(x) = (x, f(x)), \ x \in [a,b]\}.$$

0.3 Forme polaire des nombres complexes



Si $P(x,y)$ désigne un point du plan complexe correspondant au nombre complexe $z = x + iy$, nous voyons que

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$ est le module ou la valeur absolue de $z = x + iy$, et θ est appelé l'amplitude ou l'argument de $z = x + iy$, noté $\arg z$, est l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OP}$ avec le demi-axe positif Ox.

On en tire

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

qui est appelée la **forme polaire** ou **forme trigonométrique** du nombre complexe z.

Si $-\pi < \theta \leq \pi$, alors l'angle θ est appelé l'**argument principal**, noté par $\operatorname{Arg}\theta$. On a

$$\arg z = \operatorname{Arg}\theta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

0.3.1 Formule de De Moivre

Si $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$, $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$, alors

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\right\}, \tag{0.1}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\right\}.$$

Une généralisation de (0.1) conduit à

$$z_1 z_2 ... z_n = r_1 r_2 ... r_n \left\{\cos(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n)\right\},$$

ce qui, si $z_1 = z_2 = ... = z_n = z$, conduit à

$$z^n = \left\{r(\cos\theta + i \sin\theta)\right\}^n = r^n \left\{\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)\right\},$$

qui est appelée formule de De Moivre.

0.3.2 Racines d'un nombre complexe

Un nombre z est appelé racine n-ième d'un nombre complexe $a + ib$ si $z^n = a + ib$, et nous écrivons $z = (a + ib)^{\frac{1}{n}}$ ou $z = \sqrt[n]{a + ib}$. D'après la formule de De Moivre

$$\begin{aligned} z &= (a + ib)^{\frac{1}{n}} = \left\{r(\cos\theta + i \sin\theta)\right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= r^{\frac{1}{n}} \left\{\cos\left(\tfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\tfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right\}, \ k = 0, 1, 2, ...n - 1. \end{aligned}$$

D'où il résulte qu'il y a n racines n-ièmes différentes de $a + ib$ pourvu que $a + ib \neq 0$.

Exemple 3

Calculer les racines quatrièmes de 1.

On a $\sqrt[4]{1} = \left\{\cos(0 + 2k\pi) + i \sin(0 + 2k\pi)\right\}^{\frac{1}{4}} = \cos\left(\dfrac{2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\dfrac{2k\pi}{4}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3.$

Pour $k = 0,\ z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$; $\quad k = 1,\ z_1 = \cos\dfrac{\pi}{2} + i \sin\dfrac{\pi}{2} = i$;

$k = 2,\ z_1 = \cos\pi + i \sin\pi = -1$; $\quad k = 3,\ z_3 = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i \sin\dfrac{3\pi}{2} = -i.$ ∎

Exemple 4

Calculer $\sqrt[3]{1-i}$.

On a

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1-i} = (1-i)^{\frac{1}{3}} &= \left\{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)\right\}^{\frac{1}{3}} \\
&= \sqrt{2}^{\frac{1}{3}}\left\{\cos\left(\frac{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\right\} \\
&= \sqrt[6]{2}\left\{\cos\left(\frac{-\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right\},\ k = 0, 1, 2.
\end{aligned}$$

Pour $k=0,\ z_0 = \sqrt[6]{2}\left\{\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right\};\quad k=1,\ z_1 = \sqrt[6]{2}\left\{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right\};$
$k=2,\ z_2 = \sqrt[6]{2}\left\{\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right\}.$ ∎

Chapitre 1

Fonctions élémentaires

Sommaire

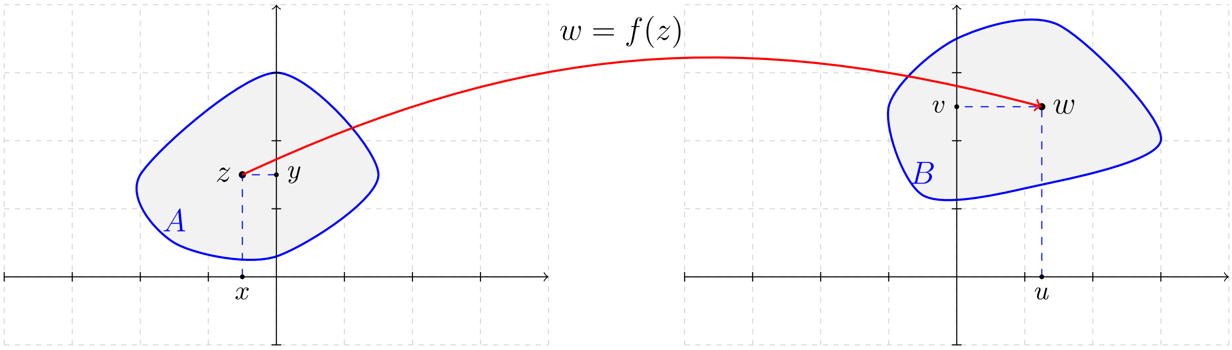
1.1 Fonctions complexes

Définition 7

Soient A et B deux ensembles non vides dans $\mathbb{C}$. Si à chaque valeur $z \in A$, il correspond une ou plusieurs valeurs $w \in B$, on dit que w est une fonction de z et on écrit $w = f(z)$ ou

$$\begin{aligned} f: \quad A &\longrightarrow B \\ z &\longmapsto w = f(z) \,. \end{aligned}$$

La fonction $w = f(z)$ définie une correspondance entre deux plans complexes.



Exemple 5

$z \mapsto w = f(z) = z^2$. Par exemple, la valeur de f en $z = 2i$ est $f(2i) = (2i)^2 = -4$. ∎

1.1.1 Fonctions uniformes et multiformes

Définition 8

- Si une seule valeur de w correspond à chaque valeur de z on dira que w est une fonction **uniforme** de z ou que $f(z)$ est uniforme.
- Si plusieurs valeurs de w correspondent à chaque valeur de z, on dira que w est une fonction **multiforme** de z.

Remarque 9

- Une fonction multiforme peut être considérée comme un ensemble de fonctions uniformes, chaque élément de cet ensemble étant appelé une **branche** de la fonction.
- On choisit habituellement un élément comme **branche principale,** ainsi est appelée **détermination principale**.

Exemple 6

Si $w = f(z) = z^2$, à toute valeur de z il correspond une seule valeur de w. Donc $f(z) = z^2$ est une fonction uniforme de z. ■

Exemple 7

Si l'on considère la fonction $w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$, à chaque valeur de z correspondent deux valeurs de w. Donc $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ est une fonction multiforme de z. ■

1.1.2 Fonctions inverses

Si $w = f(z)$, on peut aussi considérer z comme fonction de w, ce qui peut s'écrire sous la forme $z = g(w) = f^{-1}(w)$. La fonction f^{-1} est appelée la fonction inverse de f.

Exemple 8

La fonction $g(z) = z^{\frac{1}{2}}$ est la fonction inverse de la fonction $f(z) = z^2$. ■

1.1.3 Transformations

Définition 10

Si $z = x+iy$, on peut écrire $f(z)$ comme $f(z) = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$. Les fonctions u et v sont appelées, respectivement, **partie réelle** et **partie imaginaire** de f. On note

$$u = \operatorname{Re}(f) \quad \text{et } v = \operatorname{Im}(f).$$

Exemple 9

$f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + (3yx^2 - y^3)\,i$.

Les parties réelle et imaginaire sont $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ et $v(x,y) = 3yx^2 - y^3$. ■

1.1.4 Limites

Définition 11

Soit f une fonction complexe à une variable complexe, on dit que f admet une limite l en $z_0 = x_0 + iy_0$, et on note $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

Exemple 10

Soit $f(z) = z^2$. Par exemple $\lim\limits_{z \to i} f(z) = f(i) = i^2 = -1$. ■

Proposition 12

Posons $l = a + ib$ et $f = u + iv$ où a, b, u et v sont des réels, alors

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \Longleftrightarrow \left\{ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a \text{ et } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b \right\}.$$

Remarque 13

Quand la limite d'une fonction existe, elle est unique. Si la fonction f est multiforme la limite de f quand $z \to z_0$ peut dépendre de la branche choisie.

1.1.5 Continuité

Définition 14

Soit f une fonction complexe uniforme. La fonction f est dite continue en z_0 si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z)$.

Une fonction f est dite continue dans une région du plan complexe si elle est continue en tous les points de cette région.

Exemple 11

Soit f la fonction définie par

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{si } z \neq i \\ 0 & \text{si } z = i. \end{cases}$$

Quand z tend vers i, $f(z)$ se rapproche de $i^2 = -1$, *i.e.* $\lim\limits_{z\to i} f(z) = i^2 = -1$. Mais $f(i) = 0$. Donc $\lim\limits_{z\to i} f(z) \neq f(i)$ et la fonction n'est pas continue en $z = i$. ▪

Remarque 15

La fonction $f = u + iv$ est continue dans un domaine si et seulement si la partie réelle u et la partie imaginaire v sont continues.

1.2 Fonctions élémentaires

1.2.1 Les fonctions polynômiales

Les fonctions polynômiales sont définies par

$$f(z) = P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ...a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

où $a_n \neq 0,\ a_0, a_1, ...a_n$ sont des constantes complexes et n un entier positif appelé le **degré** du polynôme $P(z)$.

1.2.2 Les fractions rationnelles

Les fractions rationnelles sont définies par

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

où P et Q sont des polynômes. Le cas particulier $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, où $ad - bc \neq 0$ est appelé transformation **homographique**.

1.2.3 Les fonctions exponentielles

Les fonctions exponentielles sont définies par

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

formule dans laquelle e est la base des logarithmes népériens, $e \simeq 2,718$. Si a est réel et positif on définit

$$a^z = e^{z \operatorname{Log} a}.$$

Les fonctions exponentielles complexes ont des propriétés analogues à celles des fonctions exponentielles réelles. Ainsi par exemple $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$.

1.2.4 Fonctions trigonométriques

Nous définirons les fonctions trigonométriques ou **circulaires**, $\sin z$, $\cos z$, etc., à l'aide des fonctions exponentielles de la manière suivante.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)} \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

La plupart des propriétés des fonctions trigonométriques réelles sont encore valables dans le cas complexe. Ainsi par exemple $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$, ...

1.2.5 Les fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont définies comme suit :

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \frac{2}{e^{z} + e^{-z}} \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{sh} z} = \frac{2}{e^{z} - e^{-z}}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}} \qquad \operatorname{coth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^{z} + e^{-z}}{e^{z} - e^{-z}}.$$

Les propriétés suivantes sont encore vérifiées :
$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$, $\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$, ...

Les fonctions trigonométriques (ou circulaires) et les fonctions hyperboliques sont liées par les relations suivantes :

$$\sin(iz) = i \operatorname{sh} z \qquad \cos(iz) = \operatorname{ch} z \qquad \operatorname{tg}(iz) = i \operatorname{th} z$$

$$\operatorname{sh}(iz) = i \sin z \qquad \operatorname{ch}(iz) = \cos z \qquad \operatorname{th}(iz) = i \operatorname{tg} z.$$

1.2.6 Fonctions logarithmiques

La fonction $f(z) = \operatorname{Log} z$, $z \neq 0$ est définie comme l'inverse de la fonction exponentielle e^z.

$$w = \operatorname{Log} z \Leftrightarrow z = e^{w}.$$

Question : Pour un nombre complexe z donné, le nombre w qui vérifie $z = e^w$ est-il unique?

Réponse : Posons $z = x + iy$ et $w = u + iv$. On a

$$z = e^w \quad \Leftrightarrow \quad x + iy = e^{u+iv} = e^u (\cos v + i \sin v)$$

$$\Leftrightarrow \quad \{|z| = e^u \;\text{ et }\; v = \operatorname{Arg} z + 2k\pi,\; k \in \mathbb{Z}\}.$$

D'où w n'est pas unique car

$$w = \operatorname{Log} z = u + iv = \ln|z| + i\,(\operatorname{Arg} z + 2k\pi),\; k \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 16

La fonction $\operatorname{Log} z$, $z \neq 0$ est une fonction multiforme définie par

$$\begin{aligned}\operatorname{Log} z &= \ln|z| + i \arg z \\ &= \ln|z| + i\,(\operatorname{Arg} z + 2k\pi),\; k \in \mathbb{Z},\; \text{où } -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi.\end{aligned}$$

Remarque 17

La détermination **principale** ou valeur principale de $\operatorname{Log} z$ est souvent définie par

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z,\; \text{où } -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi.$$

Exemple 12

$\operatorname{Log}(-1) = \ln|-1| + i \arg(-1) = i(\pi + 2k\pi),\; k \in \mathbb{Z}.$

Pour la détermination principale, $\operatorname{Log}(-1) = i\pi$. ∎

Les propriétés suivantes sont vérifiées (modulo$[2\pi i]$) :

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 \quad ; \quad \operatorname{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Log} z_1 - \operatorname{Log} z_2 \quad ; \quad \operatorname{Log}(z^n) = n \operatorname{Log} z.$$

Exemple 13

Utilisons la détermination principale du logarithme :

$$\operatorname{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i \operatorname{Arg}(1+i) = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} i,$$

$$\operatorname{Log}(-1) = \ln|-1| + i \operatorname{Arg}(-1) = \pi i,$$

$$\operatorname{Log}((1+i)(-1)) = \operatorname{Log}(-1-i) = \ln|-1-i| + i \operatorname{Arg}(-1-i) = \ln\sqrt{2} - \frac{3\pi}{4} i.$$

On remarque que $\operatorname{Log}((1+i)(-1)) = \operatorname{Log}(1+i) + \operatorname{Log}(-1) - 2\pi i$. ∎

1.2.7 La fonction z^α

La fonction z^α, $\alpha \in \mathbb{C}$, est définie par

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z}.$$

De même si $f(z)$ et $g(z)$ sont deux fonctions données, de z, on peut définir

$$f(z)^{g(z)} = e^{g(z) \operatorname{Log} f(z)}.$$

En général de telles fonctions sont multiformes.

Exemple 14

$i^{-i} = e^{-i \operatorname{Log} i} = e^{-i(\ln|i| + i \arg(i))} = e^{-i^2\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

La détermination principale est $i^{-i} = e^{\frac{\pi}{2}}$. ▪

Remarque 18

On a $(z^\alpha)^k = z^{\alpha k}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais $(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\beta}$ dans le cas général si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Exemple 15

On a $\left((-i)^2\right)^i = (-1)^i = e^{i \operatorname{Log}(-1)} = e^{i(\ln|-1| + i \arg(-1))} = e^{i^2(\pi + 2k\pi)} = e^{-\pi - 2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais $(-i)^{2i} = e^{2i \operatorname{Log}(-i)} = e^{2i(\ln|-i| + i \arg(-i))} = e^{2i^2\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = e^{\pi - 4k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. ▪

1.2.8 Fonctions trigonométriques inverses

$$\operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \qquad \operatorname{Arcos} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right) \qquad \operatorname{Arcotg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{z + i}{z - i}\right).$$

1.2.9 Fonctions hyperboliques inverses

$$\operatorname{Argsh} z = \operatorname{Log}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right) \qquad \operatorname{Argch} z = \operatorname{Log}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$\operatorname{Argth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Log}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) \qquad \operatorname{Argcoth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Log}\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right).$$

Chapitre 2

Dérivation dans le domaine complexe

Sommaire

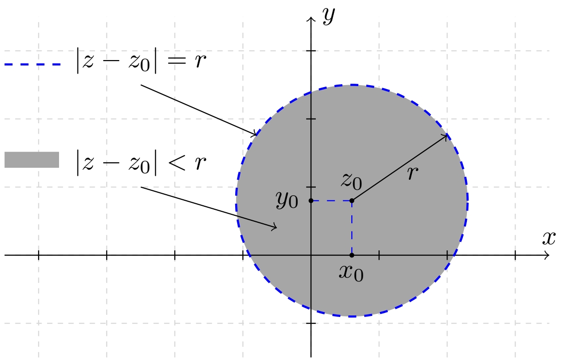
2.1 Domaines dans le plan complexe

On note $D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - z_0| < r,\ r > 0\}$.

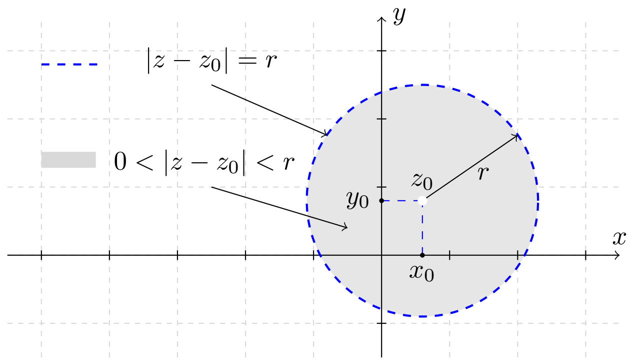
$D_r(z_0)$ est appelé disque ouvert de centre z_0 et de rayon r.

On note $\tilde{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } 0 < |z - z_0| < r,\ r > 0\}$.

$\tilde{D}_r(z_0)$ est appelé disque ouvert pointé de z_0.



Disque ouvert de centre z_0



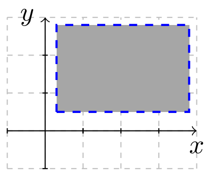
Disque ouvert pointé de z_0

Définition 19

Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit **ouvert** si chaque point z de E peut être entouré par un disque ouvert centré en ce point et tous les points du disque sont contenus dans E.

Exemple 16

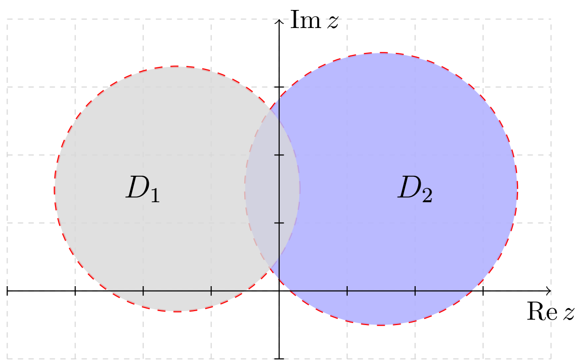
Un rectangle sans ses arêtes est un ensemble ouvert.



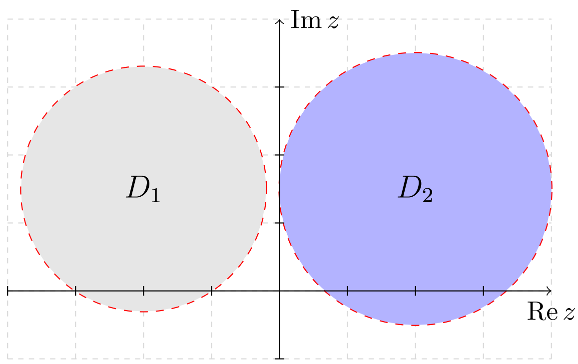
Définition 20

Un ensemble ouvert $S \subset \mathbb{C}$ est dit **connexe** si deux points quelconques de S peuvent être joints par un chemin formé de segments de droites dont tous les points appartiennent à S.

Intuitivement, un ensemble est connexe si elle ne peut être divisé en une union disjointe d'ensembles ouverts.



L'ensemble $E = D_1 \cup D_2$ est connexe



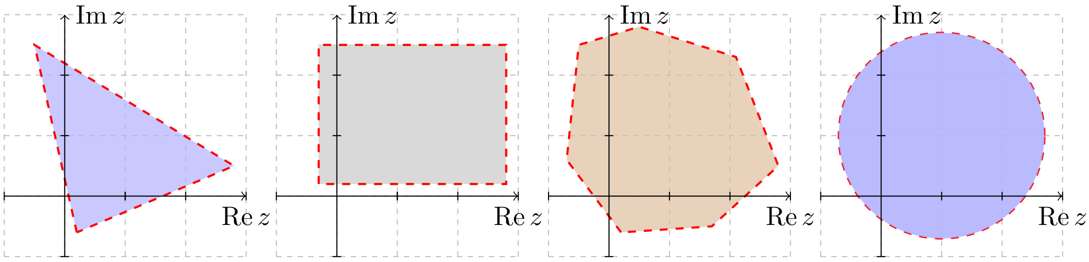
L'ensemble $E = D_1 \cup D_2$ n'est pas connexe

Définition 21

Un **domaine** dans le plan complexe est un ensemble connexe ouvert.

Exemple 17

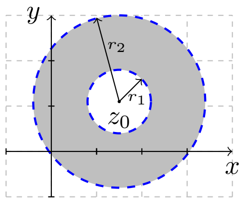
Les triangles, les rectangles, les polygones et les disques ouverts sont des domaines



■

Exemple 18

La couronne de centre z_0 et de rayons r_1 et r_2 est un domaine.



■

2.2 Fonctions holomorphes

2.2.1 Dérivées

Par analogie avec le cas des fonctions réelles, on définit la dérivée d'une fonction complexe f de la variable complexe z.

Définition 22

Soit D un domaine dans le plan complexe. Soit f une fonction de D dans $\mathbb{C}$ et $z_0 \in D$.

La dérivée de f en z_0 est définie par

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

pourvu que cette limite existe. Dans ce cas on dit que f est dérivable en z_0.

On utilise souvent l'écriture analogue

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Définition 23

Si la dérivée de f existe en tout point z d'un domaine D, alors f est dite **holomorphe** dans D.

Une fonction f est dite **holomorphe** en un point z_0 si elle est dérivable dans un disque ouvert centré en z_0.

Exemple 19

La fonction $f(z) = \dfrac{1}{z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. ▪

Exemple 20

La fonction $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ n'est pas dérivable en aucun point. ▪

Définition 24

Une fonction f est dite **entière** si elle est dérivable dans tout le plan complexe $\mathbb{C}$.

Exemple 21

Les polynômes $f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0,\ a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$ sont des fonctions entières. ▪

2.2.2 Conditions de Cauchy-Riemann

Soit D un domaine dans $\mathbb{C}$ et $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction de D dans $\mathbb{C}$. Si f est holomorphe dans D, alors les dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ existent en tout point de D, et vérifient les **conditions de Cauchy-Riemann**

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.} \tag{2.1}$$

Réciproquement, si les dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ **continues** dans D, et vérifient les **conditions de Cauchy-Riemann**, alors la fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est holomorphe dans D.

Proposition 25

Soit D un domaine dans $\mathbb{C}$. Si $f = u + iv$ est holomorphe dans D, alors la dérivée de f est donnée par

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y}, \quad z \in D.$$

Exemple 22

On considère la fonction définie par $f(z) = z^2$. On a $f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, d'où $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = 2xy$. Alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

La fonction f est donc holomorphe dans $\mathbb{C}$, et $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2iy = 2z$. ▪

Remarque 26

1. En multipliant la deuxième condition de (2.1) par i et l'ajouter à la première, les conditions de Cauchy-Riemann peuvent être reformulées comme

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0.}$$

2. En notant que $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, les conditions de Cauchy-Riemann aussi peuvent être écrites sous la forme

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.}$$

Exemple 23

Soit la fonction définie par $f(z) = z^2 + z\operatorname{Re} z$. On a $\operatorname{Re} z = x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, alors $f(z) = z^2 + z\dfrac{z+\overline{z}}{2} = \dfrac{3}{2}z^2 + \dfrac{1}{2}z\overline{z}$, et donc $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}z \neq 0$. D'où la fonction f ne peut pas être holomorphe en aucun domaine. ∎

Dérivées d'ordre supérieur

Si f est holomorphe dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$, sa dérivée est notée f'. Si f' est holomorphe également dans le même domaine, sa dérivée est notée f''. De la même façon la dérivée $n^{ième}$ de f sera notée $f^{(n)}$.

Proposition 27

Si f est holomorphe dans un domaine D, alors $f', f'', \ldots$ sont également holomorphe dans D, *i.e.* les dérivées de tous ordres existent dans D.

On n'a pas un résultat analogue pour les fonctions réelles.

2.2.3 Fonctions harmoniques

Soit u une fonction de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. u est dite de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, (on note $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$), si $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ existent et continues sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Définition 28

Soit u une fonction de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω. On dit que u est **harmonique** si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ pour tout } (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Notation. La fonction $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ est notée Δu et est appelée **laplacien** de u. ■

Exemple 24

Soit la fonction u de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $u(x,y)=e^y\cos x$. On a

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-e^y\sin x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-e^y\cos x,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=e^y\cos x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^y\cos x.$$

La fonction u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega=\mathbb{R}^2$ et on a $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^y\cos x2+e^y\cos x=0$, d'où la fonction u est harmonique. ■

Proposition 29

Soit $f(z)=u(x,y)+iu(x,y)$ une fonction holomorphe dans un domaine $D\subset\mathbb{C}$. Les deux fonctions réelles u et v sont harmoniques dans D.

Exemple 25

On reprend l'exemple $f(z)=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$ où $u(x,y)=x^2-y^2$ et $v(x,y)=2xy$. On a

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\qquad &&\frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2,\\ &\frac{\partial v}{\partial x}=2y,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\qquad &&\frac{\partial v}{\partial y}=2x,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.\end{aligned}$$

Alors $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2-2=0$ et $\Delta v=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0+0=0$. D'où les fonctions u et v sont harmoniques. ■

Définition 30

Soit u une fonction harmonique dans $A\subset\mathbb{R}^2$. Alors une fonction v est dite **harmonique conjuguée** de u si les fonctions u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann.

Proposition 31

Soit u une fonction harmonique dans $A\subset\mathbb{R}^2$. Alors il existe une fonction f holomorphe de $A\subset\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\operatorname{Re} f=u$.

Exemple 26

Soit la fonction définie par $u(x,y)=x^2-y^2+x,\ x,y\in\mathbb{R}$.

Trouver une fonction v pour que la fonction $f=u+iv$ soit holomorphe.

On a

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+1,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2.\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2.$$

Alors $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$, ce qui montre que u est harmonique.
Pour trouver une fonction v pour que $f = u + iv$ soit holomorphe, on utilise les conditions de Cauchy-Riemann. Ces conditions s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y. \tag{2.3}$$

En intégrant l'équation (2.2) par rapport à y, il vient

$$v = 2xy + y + C_1(x), \tag{2.4}$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x.
Par substitution de (2.4) dans (2.3) on obtient

$$2y + \frac{d}{dx}C_1(x) = 2y \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}C_1(x) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1(x) = c,$$

où c désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.4), $v = 2xy + y + c$. ▪

2.2.4 Règles de dérivation

Les règles de dérivation concernant sommes, différences, produits, quotients et compositions (lorsqu'elles sont définies) sont les mêmes que celles utilisées dans le cas des fonctions réelles.

Les dérivées des fonctions élémentaires dans le cas complexe sont identiques à celles dans le cas réel.

Exemple 27
$\dfrac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}$, $\dfrac{d\sin z}{dz} = \cos z$, $\dfrac{de^z}{dz} = e^z$, ... ▪

2.2.5 Règle de l'Hôpital

Soit f et g deux fonctions holomorphes dans un domaine contenant le point z_0 et supposons que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ avec $g'(z_0) \neq 0$. Alors la règle de L'Hôpital permet d'affirmer que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Dans le cas où $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$, on peut utiliser cette règle à nouveau.

Exemple 28
$\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z^6 + 1}{z^2 + 1} = \lim\limits_{z \to i} \dfrac{6z^5}{2z} = 3i^4 = 3.$ ▪

2.2.6 Points singuliers

Soit f une fonction uniforme. Un point en lequel la fonction f cesse d'être holomorphe est appelé un point singulier ou une singularité de f. Il existe des types variés de singularités.

Singularités apparentes

Le point singulier z_0 est appelé singularité **apparente** de f si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ existe.

Exemple 29
Le point singulier $z = 0$ est une singularité apparente de la fonction $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ puisque $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$. ▪

Pôles

Si l'on peut trouver un entier positif n tel que $\lim\limits_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) = a \neq 0$, alors z_0 est appelé un **pôle d'ordre** n. Si $n = 1$, z_0 est appelé un **pôle simple**.

Exemple 30
$f(z) = \dfrac{3z-1}{(z-1)^2 (z+4)}$ a un pôle double en $z = 1$ et un pôle simples en $z = -4$. ▪

Singularités essentielles

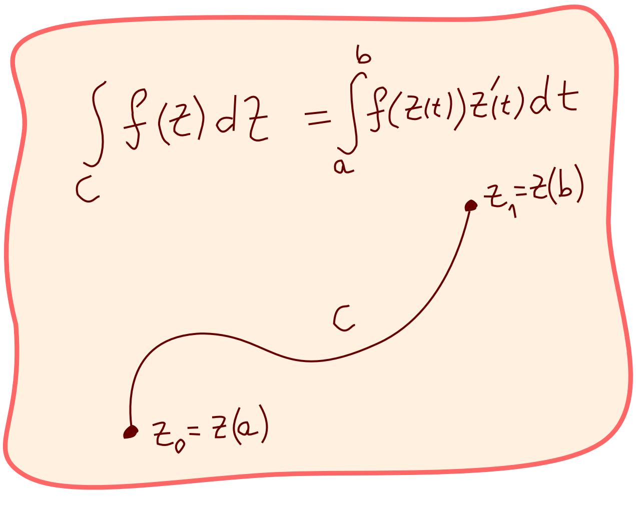
Une singularité qui n'est ni un pôle, ni une singularité apparente est appelée **singularité essentielle**.

Exemple 31
$f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$ a une singularité essentielle en $z = 1$. ▪

Chapitre 3

Intégration dans le domaine complexe

Sommaire



3.1 Chemins et courbes dans le plan complexe

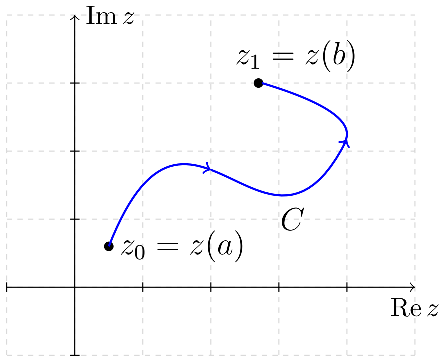
Définition 32

Un **chemin** est défini comme étant une fonction continue d'un intervalle réel $[a, b]$, $a < b$, vers le plan complexe.

$$\begin{array}{rl} [a,b] & \to \mathbb{C} \\ t & \mapsto z(t) = x(t) + iy(t) \, . \end{array}$$

Ses points initial et final sont $z_0 = z(a)$ et $z_1 = z(b)$.

La fonction $t \mapsto z(t)$ est souvent notée $t \mapsto \gamma(t)$.

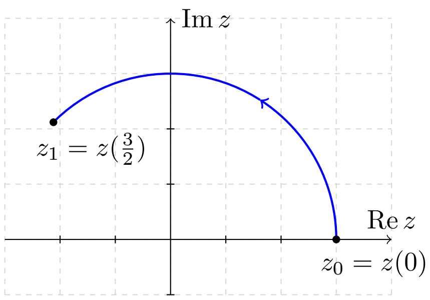


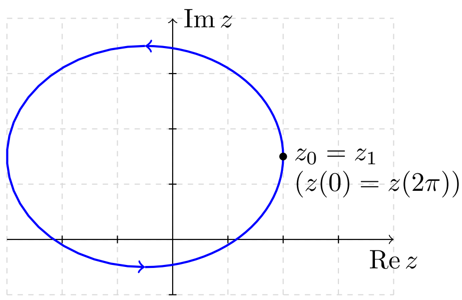
Définition 33

L'image $C = \{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [a, b]\}$ s'appelle **courbe** dans le plan complexe paramétrée par la fonction $t \mapsto z(t)$.

Exemple 32

Les fonctions $z(t) = 3\cos t + 3i \sin t,\ 0 \le t \le \frac{3\pi}{2}$ et $z(t) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\cos t + i\left(\frac{3}{2} + \sin t\right),\ 0 \le t \le 2\pi$ définies des chemins dans le plan complexe.





$z(t) = 3\cos t + 3i \sin t,\ 0 \le t \le \frac{3\pi}{4}.$ | $z(t) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\cos t + i\left(\frac{3}{2} + 2\sin t\right),\ 0 \le t \le 2\pi.$ ■

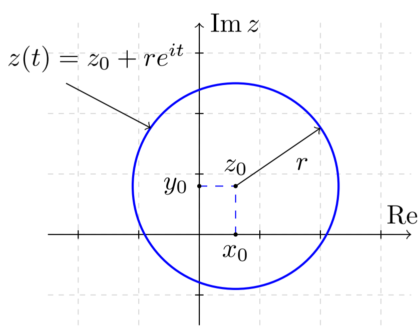
Exemple 33

Le cercle de centre z_0 et de rayon r est une courbe paramétrée par la fonction

$$z(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t),\ 0 \le t \le 2\pi,$$

ou

$$z(t) = z_0 + re^{it},\ 0 \le t \le 2\pi.$$



Cercle de centre z_0 et de rayon r ■

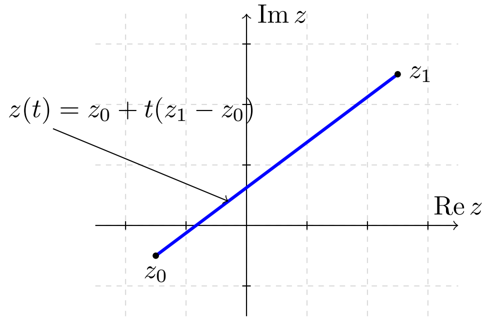
Exemple 34

Le segment d'extrémités z_0 et z_1 noté $[z_0, z_1]$ est une courbe paramétrée par la fonction

$$z\,(t) = z_0\,(1-t) + tz_1,\ 0 \leq t \leq 1,$$

ou

$$z\,(t) = z_0 + t\,(z_1 - z_0)\,,\ 0 \leq t \leq 1.$$

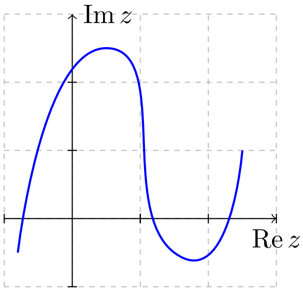


Segment d'extrémités z_0 et z_1 ■

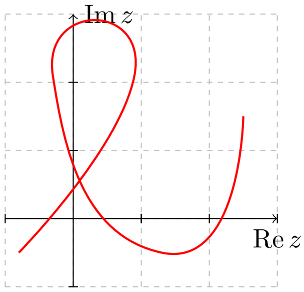
Définition 34

1. Si les points initial et final d'un chemin coïncident, il est appelé **chemin fermé** ou **lacet**.
2. On dit qu'un chemin est **simple** si ne se recoupe pas lui-même *i.e.* il n'a pas de points doubles.
3. Toute courbe fermée et simple, est appelée courbe de **Jordan**.

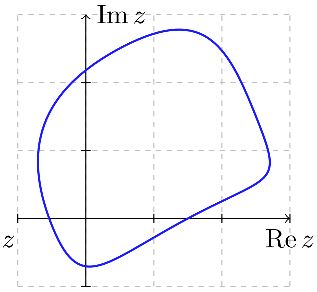
Exemple 35



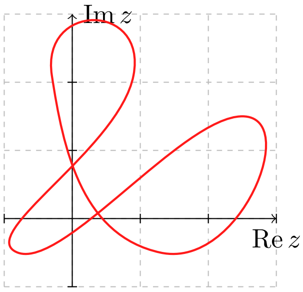
Chemin non fermé et simple



Chemin non fermé et non simple



Chemin fermé et simple



Chemin fermé et non simple ■

3.2 Intégration le long d'une courbe

Soit D un domaine du plan complexe $\mathbb{C}$ et soit C une courbe paramétrée par un chemin

$$\begin{array}{rcl} z: & [a,b] & \longrightarrow D \\ & t & \longmapsto z\,(t)\,, \end{array}$$

tel que $z'\,(t)$ existe et continue. Soit f une fonction complexe continue définie sur D

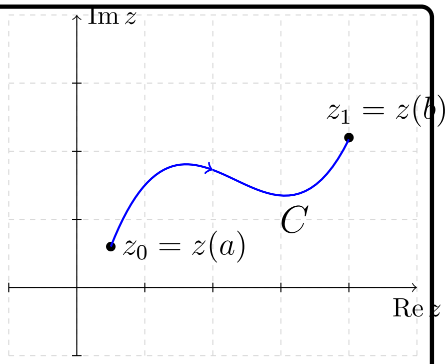
$$\begin{array}{rcl} f: & D & \longrightarrow \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto f\,(z)\,. \end{array}$$

Définition 35

On définit l'intégrale de f le long de la courbe C par

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt.$$

Si la courbe est fermée et orientée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ↺ on note $\oint_C f(z)\,dz$ au lieu de $\int_C f(z)\,dz$.



Remarque 36

1. L'intégrale le long d'une courbe est aussi appelée intégrale le long d'un **chemin**, ou intégrale **curviligne** complexe.
2. Le sens inverse des aiguilles d'une montre est aussi appelé le sens positif ou sens direct.

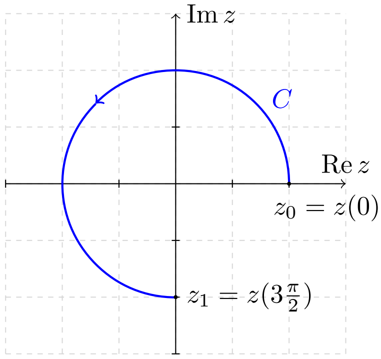
Exemple 36

Soit C l'arc $\left\{z(t) \in \mathbb{C} \text{ tel que } z(t) = 2e^{it}, 0 \le t \le \frac{3\pi}{2}\right\}$.
Évaluons l'intégrale $\int_C z^2 dz$.

On a $dz = z'(t)\,dt = 2ie^{it}dt$. Alors

$$\int_C z^2 dz = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(2e^{it}\right)^2 2ie^{it}dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 8ie^{3it}dt$$

$$= \left[\frac{8}{3}e^{3it}\right]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{8}{3}e^{6i\pi} - \frac{8}{3}e^{\frac{9}{2}i\pi} = \frac{8}{3} - \frac{8}{3}i.$$



■

Proposition 37

Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ et $z(t) = x(t) + iy(t)$, l'intégrale $\int_C f(z)\,dz$ peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C (udx - vdy) + i(vdx + udy) \\ &= \int_a^b \{u(x(t),y(t))\,x'(t) - v(x(t),y(t))\,y'(t)\}\,dt \\ &\quad + i\int_a^b \{v(x(t),y(t))\,x'(t) + u(x(t),y(t))\,y'(t)\}\,dt.\end{aligned}$$

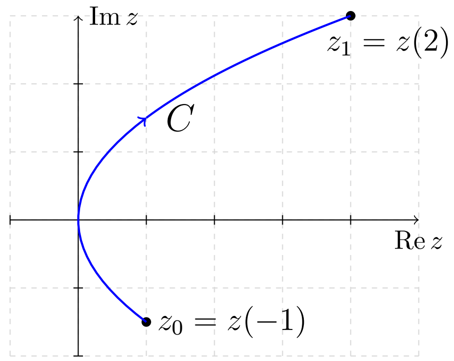
Exemple 37

Calculer $\int_C f(z)\,dz$ où $f(z) = i\overline{z} = y + ix$ et

$$C = \left\{ \left(t^2, \tfrac{3}{2}t\right) \in \mathbb{R}^2,\ t \in [-1, 2] \right\}.$$

On a $x(t) = t^2$, $y(t) = \frac{3}{2}t$ et

$$dz = dx + idy = (x'(t) + iy'(t))\,dt = \left(2t + \tfrac{3}{2}i\right) dt.$$



Alors

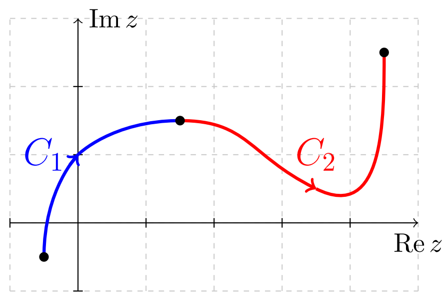
$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz &= \int_{t=-1}^{t=2} (y(t) + ix(t))\,(x'(t) + iy'(t))\,dt \\
&= \int_{-1}^{2} \left(t + it^2\right)\left(2t + \tfrac{3}{2}i\right) dt = \int_{-1}^{2} \left(\tfrac{1}{2}t^2 + i\left(2t^3 + \tfrac{3}{2}t\right)\right) dt \\
&= \left[\tfrac{1}{6}t^3 + i\left(\tfrac{1}{2}t^4 + \tfrac{3}{4}t^2\right)\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2} + \frac{39}{4}i.
\end{aligned}$$

■

3.2.1 Propriétés

Soit C une courbe dans le plan complexe. On note par $-C$, la courbe C orientée dans son sens inverse. On suppose que $C = C_1 \cup C_2$ avec le point final de la courbe C_1 coïncide avec le point initial de la courbe C_2.

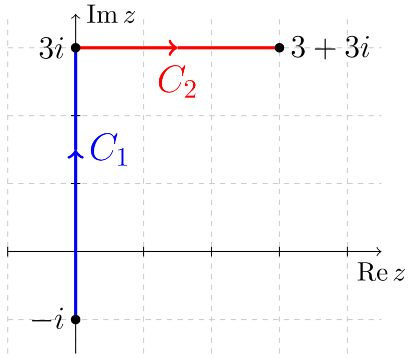
Si f et g sont intégrables le long de C, alors



1. $\int_C (f(z) + g(z))\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz.$
2. $\int_C \alpha f(z)\,dz = \alpha \int_C f(z)\,dz$ où α est une constante dans $\mathbb{C}$.
3. $\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz.$
4. $\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1 \cup C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.$

Exemple 38

Évaluer $\int_C \bar{z}dz$ où C est la courbe formée des segments joignant $-i$ à $3i$ et $3i$ à $3+3i$.



Soit $C_1 = \{(4t-1)\,i \in \mathbb{C},\ 0 \leq t \leq 1\}$ le segment joignant $-i$ à $3i$ et $C_2 = \{3t+3i \in \mathbb{C},\ 0 \leq t \leq 1\}$ le segment joignant $3i$ à $3+3i$.

Sur le segment C_1, on a $z\,(t) = (4t-1)\,i$, $dz = z'\,(t)\,dt = 4idt$ et

$$\int_{C_1} \bar{z}dz = \int_0^1 -(4t-1)\,i\,(4idt) = \int_0^1 (16t-4)\,dt = \left[8t^2-4t\right]_0^1 = 4.$$

Sur le segment C_2, on a $z\,(t) = 3t+3i$, $dz = z'\,(t)\,dt = 3dt$ et

$$\int_{C_2} \bar{z}dz = \int_0^1 -(4t-1)\,i\,(3dt) = \int_0^1 (-12t+3)\,idt = \left[\left(-6t^2+3t\right)i\right]_0^1 = -3i.$$

Le résultat demandé est $\int_C \bar{z}dz = \int_{C_1} \bar{z}dz + \int_{C_2} \bar{z}dz = 4-3i.$ ■

Longueur d'une courbe

Soit C une courbe paramétrée par un chemin

$$\begin{aligned} z:\ [a,b] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto z\,(t)\,, \end{aligned}$$

tel que $z'\,(t) = x'\,(t) + iy'\,(t)$ existe et continue.

La **longueur** L_C de la courbe C est définie comme étant

$$\boxed{L_C = \int_a^b |z'\,(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{(x'\,(t))^2 + (y'\,(t))^2}dt.}$$

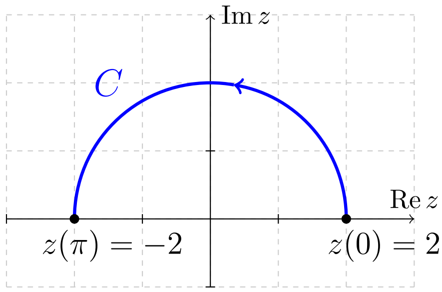
Exemple 39

Trouver la longueur du demi-cercle

$$C = \left\{z\,(t) \in \mathbb{C} \text{ où } z\,(t) = 2e^{it},\ t \in [0,\pi]\right\}.$$

On a $z'\,(t) = 2ie^{it}$ et donc $|z'\,(t)| = |2ie^{it}| = 2$.

D'où $L_C = \int_0^\pi 2dt = [2t]_0^\pi = 2\pi.$



■

Théorème d'estimation

Soit f une fonction complexe continue définie sur un domaine D du plan complexe $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f: \quad D &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z). \end{aligned}$$

Soit C une courbe paramétrée par un chemin

$$\begin{aligned} z: \quad [a,b] &\to D \\ t &\mapsto z(t), \end{aligned}$$

tel que $|f(z(t))| \leq M$, $\forall t \in [a,b]$, *i.e.* $|f(z)|$ est bornée sur C par une constante réelle M. Alors

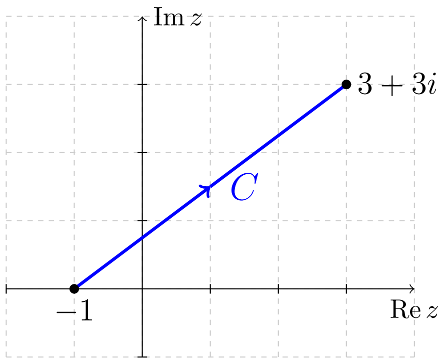
$$\boxed{\left|\int_C f(z)\, dz\right| \leq \int_C |f(z)|\ |dz| \leq M\ L_C,}$$

où, par définition,

$$\int_C |f(z)|\ |dz| = \int_a^b |f(z(t))|\ |z'(t)|\, dt$$

et L_C est la longueur de la courbe C.

Exemple 40



Soit C le segment d'extrémités -1 et $3+3i$ qui est définie par

$$C = \{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0,1] \text{ où } z(t) = -1 + 4t + 3it\}.$$

Vérifier le théorème d'estimation pour $f(z) = \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z = xy$.

On a $dz = z'(t)\, dt = (4+3i)\, dt$ et donc d'une part

$$\left|\int_C f(z)\, dz\right| = \left|\int_0^1 (-1+4t)(3t)(4+3i)\, dt\right| = \left|10 + \frac{15}{2}i\right| = \frac{25}{2} = 12,5.$$

D'autre part

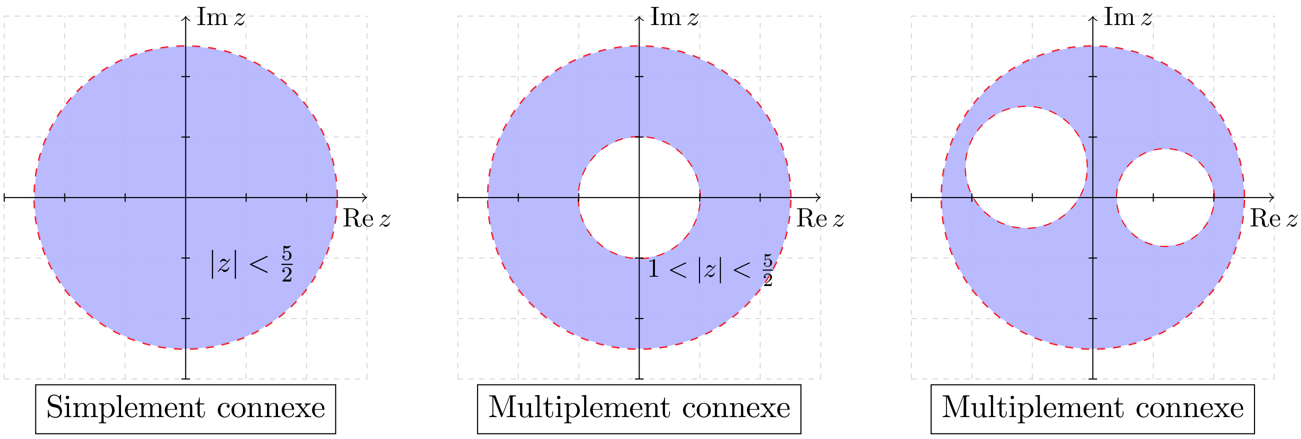
$$\int_C |f(z)|\ |dz| = \int_0^1 |f(z(t))|\ |z'(t)|\, dt = \int_0^1 |(-1+4t)(3t)|\,(5)\, dt = \frac{205}{16} = 12,8125.$$

Ainsi $M = \sup\limits_{0\leq t\leq 1} |(-1+4t)(3t)| = 9$ et $L_C = 5$.
Alors le théorème d'estimation est vérifié car $12,5 \leq 12,8125 \leq 45$. ∎

3.3 Théorèmes de Cauchy

3.3.1 Domaines simplement ou multiplement connexes

Un domaine D du plan complexe est dit **simplement connexe** si toute courbe fermée simple de D peut être réduite par déformation continue à un point sans quitter D.
Dans le cas contraire D est dit **multiplement connexe**.

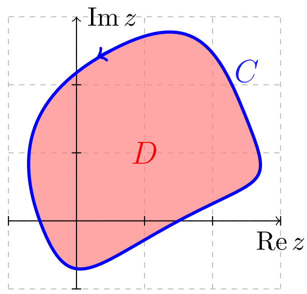


Intuitivement, un domaine sans trous est simplement connexe mais s'il possède au moins un seul trou il est multiplement connexe.

3.3.2 Théorème de Cauchy

Soit f une fonction **holomorphe** dans un domaine connexe D et sur sa frontière C. Alors

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 0.}$$



Ce théorème fondamental est souvent appelé **théorème de Cauchy**, il est à la fois valable pour des domaines simplement connexes ou multiplement connexes.

Exemple 41

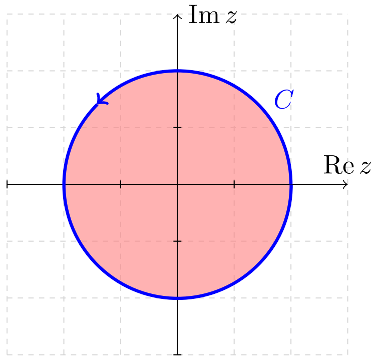
Soit le cercle de centre 0 et de rayon 2,

$$C = \left\{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0, 2\pi] \text{ où } z(t) = 2e^{it}\right\}.$$

Calculer $\oint_C z dz$.

On a $dz = z'(t)\, dt = 2ie^{it} dt$, alors

$$\oint_C z dz = \int_0^{2\pi} 2e^{it}\left(2ie^{it} dt\right) = 4i \int_0^{2\pi} e^{2it} dt = \left[2e^{2it}\right]_0^{2\pi} = 2 - 2 = 0.$$



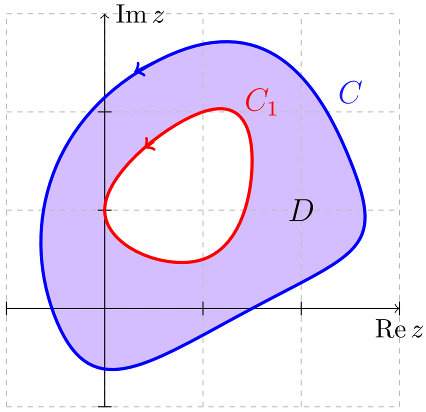
■

Proposition 38

Soit f une fonction **holomorphe** dans un domaine connexe limité par deux courbes fermées simples C et C_1 et sur ces courbes. Alors

$$\boxed{\oint_C f(z)\, dz = \oint_{C_1} f(z)\, dz.}$$

où C et C_1 sont décrites dans le sens positif relatif à leur intérieur.



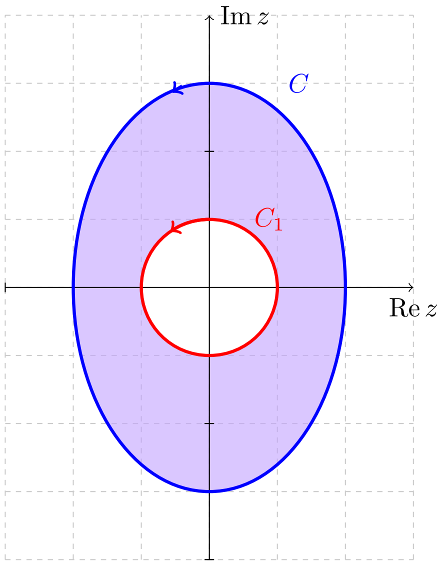
Exemple 42

Calculer $\oint_C \frac{1}{z} dz$, où C est l'ellipse définie par

$$C = \{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0, 2\pi] \text{ où } z(t) = 2\cos t + 3i \sin t\}.$$

La fonction $z \longmapsto \frac{1}{z}$ est holomorphe dans le domaine limité par les courbes C et C_1 et sur ces courbes, où C_1 est le cercle de centre 0 et de rayon 1

$$C_1 = \left\{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0, 2\pi] \text{ où } z(t) = e^{it}\right\}.$$



Alors d'après la proposition précédente

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = \oint_{C_1} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} d\left(e^{it}\right) = \int_0^{2\pi} i dt = [it]_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

■

3.3.3 Primitives et intégration

Si f et F sont **holomorphes** dans un domaine connexe D et telles que $F'(z) = f(z)$, alors F est appelée intégrale indéfinie ou anti-dérivée ou primitive de f et est notée

$$F(z) = \int f(z)\, dz.$$

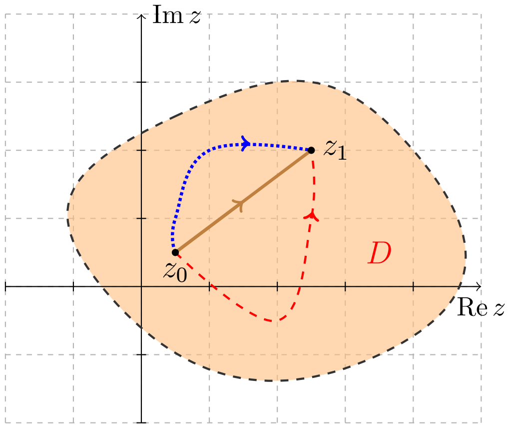
Exemple 43

On a $\frac{d}{dz}\left(3z^2 - 4\sin z\right) = 6z - 4\cos z$, alors

$$\int (6z - 4\cos z)\, dz = 3z^2 - 4\sin z + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

La fonction $z \mapsto 3z^2 - 4\sin z$ est une primitive de $z \mapsto 6z - 4\cos z$. ∎

Théorème fondamental de l'intégration

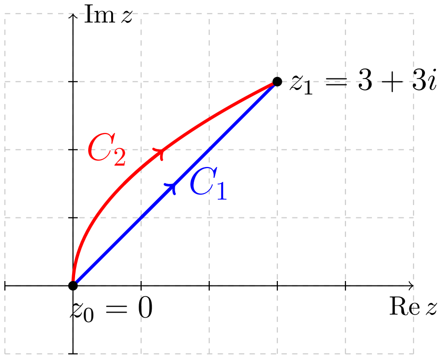


Soient f et F deux fonctions **holomorphes** dans un domaine connexe D telles que $F'(z) = f(z)$. Si z_0 et z_1 sont deux points quelconques de D, alors pour toute courbe C de point initial z_1 et de point final z_2, on a

$$\boxed{\int_C f(z)\, dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz = [F(z)]_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0).}$$

Cela signifie que si f est holomorphe alors la valeur de l'intégrale est indépendante du chemin suivi pour aller de z_0 à z_1.

Exemple 44



Évaluer $\int_C 2z dz$ de $z_0 = 0$ à $z_1 = 3 + 3i$ le long de la parabole

$$C_1 = \left\{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0, 3] \text{ où } z(t) = \tfrac{1}{3}t^2 + it\right\}$$

et le long du segment de droite

$$C_2 = \{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0, 1] \text{ où } z(t) = 3t + 3it\}.$$

Sur la parabole C_1, on a $z(t) = \frac{1}{3}t^2 + it$, $dz = z'(t)\, dt = \left(\frac{2}{3}t + i\right) dt$ et

$$\int_{C_1} 2zdz = \int_0^3 2\left(\tfrac{1}{3}t^2 + it\right)\left(\tfrac{2}{3}t + i\right) dt = \left[\left(\tfrac{1}{3}t^2 + it\right)^2\right]_0^3 = 18i.$$

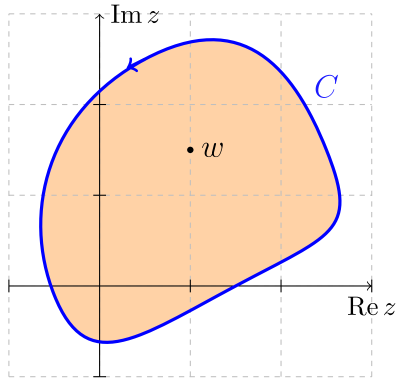
Sur le segment C_2, on a $z(t) = 3t + 3it$, $dz = z'(t)\,dt = (3+3i)\,dt$ et

$$\int_{C_2} 2z dz = \int_0^1 2(3t+3it)(3+3i)\,dt = \left[(3t+3it)^2\right]_0^1 = 18i.$$

Par le théorème fondamental de l'intégration $\int\limits_C 2z dz = \int\limits_0^{3+3i} 2z dz = \left[z^2\right]_0^{3+3i} = 18i.$

Nous observons comment il est plus facile d'évaluer ces intégrales en utilisant une primitive, au lieu de paramétrer les chemins d'intégration. ∎

3.3.4 Formule intégrale de Cauchy



Soit f une fonction **holomorphe** à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C, soit w un point intérieur à C, alors

$$\boxed{f(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(z)}{z-w}dz.}$$

où la courbe C est décrit dans le sens direct.

De même la n-ième dérivée de f en w est donnée par

$$\boxed{f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}dz, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.}$$

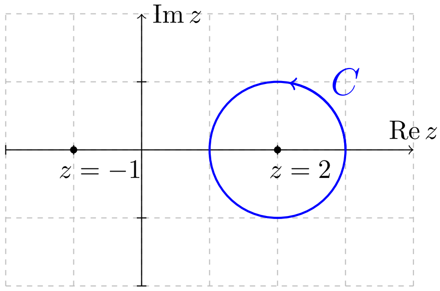
- Les deux formules précédentes sont appelées formules intégrales de Cauchy et sont très remarquables car ils montrent que si une fonction f est connue sur la courbe fermée simple C, alors ses valeurs et les valeurs de toutes ses dérivées peuvent être calculées en tout point situé à l'intérieur de C.

- Si une fonction de la variable complexe admet une dérivée première dans un domaine simplement connexe D, toutes ses dérivées d'ordre supérieur existent dans D.

  Ceci n'est pas nécessairement vrai pour les fonctions de la variable réelle.

Exemple 45

Utiliser la formule intégrale de Cauchy pour évaluer $\oint\limits_C \frac{1}{(z-2)(z+1)} dz$ le long du cercle $C = \{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0, 2\pi]$ où $z(t) = 2 + e^{it}\}$.



La fonction $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z+1}$ est holomorphe à l'intérieur du cercle C et sur C, alors d'après la formule intégrale de Cauchy avec $w = 2$, on a

$$\oint\limits_C \frac{1}{(z-2)(z+1)} dz = \oint\limits_C \frac{f(z)}{z-2} dz = 2\pi i f(2) = 2\pi i \frac{1}{2+1} = \frac{2}{3}\pi i. \qquad \blacksquare$$

Dans ce qui suit on énonce quelques théorèmes importants qui sont des conséquences des formules intégrales de Cauchy.

Inégalité de Cauchy

Si f est holomorphe à l'intérieur du cercle C et sur C, où C désigne le cercle d'équation $|z - z_0| = r$, alors

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{Mn!}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

M désignant une constante telle que $|f(z)| < M$ sur C, i.e. M est une borne supérieure de $|f(z)|$ sur C.

Théorème de Liouville

Supposons que quel que soit z dans le plan complexe

(a) f est holomorphe **(b)** f est bornée, i.e. $|f(z)| < M$, où M désigne une constante.

Alors f est constante.

Théorème fondamental de l'algèbre

Toute équation algébrique $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, possède exactement n racines, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité.

Chapitre 4

Séries infinies, séries de Taylor, séries de Laurent

Sommaire

4.1 Séries de fonctions

À partir d'une suite de fonctions $\{u_n(z)\}$, nous formons une nouvelle suite $\{S_n(z)\}$ définie par

$$S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) = \sum_{k=1}^{n} u_k(z)$$

où $S_n(z)$ est appelée la $n^{ième}$ **somme partielle**, qui est la somme des n premiers termes de la suite $\{u_n(z)\}$.

La suite $S_n(z)$ est représentée par

$$u_1(z) + u_2(z) + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z)$$

appelée **série infinie** de terme général $u_n(z)$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$, la série est dite **convergente** et $S(z)$ est sa somme ; dans le cas contraire la série est dite **divergente**.

Proposition 39

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n + ib_n)$ converge, a_n et b_n étant réels, est que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergent.

4.1.1 Convergence absolue

Définition 40

Une série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(z)$ est dite **absolument convergente** si la série des valeurs absolues, i.e. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n(z)|$, converge.

Proposition 41

Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n(z)|$ converge alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(z)$ converge.
Autrement dit une série absolument convergente est convergente.

4.2 Séries entières

Définition 42

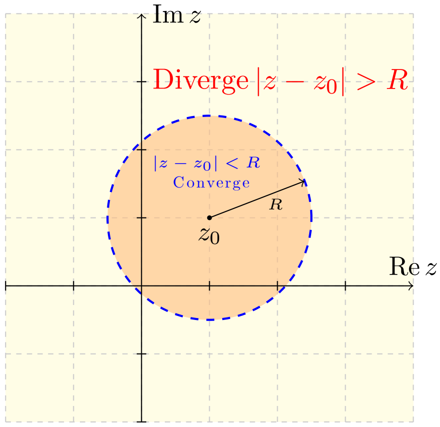
Une série de la forme

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{4.1}$$

est appelée **série entière** en $z - z_0$.

4.2.1 Rayon de convergence

Il existe un nombre positif R tel que (4.1) converge pour $|z - z_0| < R$ et diverge pour $|z - z_0| > R$, cependant que pour $|z - z_0| = R$ elle peut ou non converger.
Géométriquement si C est le cercle de rayon R centré en z_0, alors la série (4.1) converge en tous les points intérieurs à C et diverge en tous les points extérieurs ; elle peut ou non converger sur le cercle C.



Les valeurs spéciales $R = 0$ et $R = +\infty$ correspondent aux cas où (4.1) converge uniquement en $z = z_0$ ou converge pour toute valeur (finie) de z. Le nombre R est souvent appelé le **rayon de convergence** de (4.1) et le cercle $|z - z_0| = R$ est appelé le **cercle de convergence**.

Proposition 43

Nous pouvons obtenir le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ par

$$\text{critère de d'Alembert : } R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{ou celui de Cauchy : } R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

si les limites existent.

Exemple 46

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, on a $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{1}\right| = 1.$

Cette série converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| \geq 1$.

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$, on a $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ et donc $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right| = 1.$

Cette série converge dans $|z| < 1$ et diverge en dehors i.e. $|z| > 1$. Sur le cercle $|z| = 1$, la série converge en certains points et diverge en d'autres points. ▪

Proposition 44

- Une série entière peut être **dérivée** terme à terme dans tout ouvert connexe situé à l'intérieur du cercle de convergence.
- Une série entière peut être **intégrée** terme à terme sur toute courbe C située entièrement à l'intérieur du cercle de convergence.

4.3 Séries de Taylor

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C. Alors

$$f(z_0+h)=f(z_0)+hf'(z_0)+\frac{h^2}{2!}f''(z_0)+...+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(z_0)+....$$

ou en posant $z=z_0+h, \quad h=z-z_0$,

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+....$$

Ceci est appelé le théorème de Taylor et les séries précédentes sont appelées **séries de Taylor** ou **développement de Taylor** de $f(z_0+h)$ ou $f(z)$.

Le domaine de convergence de la dernière série est défini par $|z-z_0|<R$, le rayon de convergence R étant égal à la distance de z_0 à la singularité de $f(z)$ la plus proche.

Sur $|z-z_0|=R$ la série peut ou non converger.

Pour $|z-z_0|>R$ la série diverge.

Si la singularité la plus proche est à l'infini, le rayon de convergence $R=+\infty$, i.e. la série converge quel que soit z dans $\mathbb{C}$.

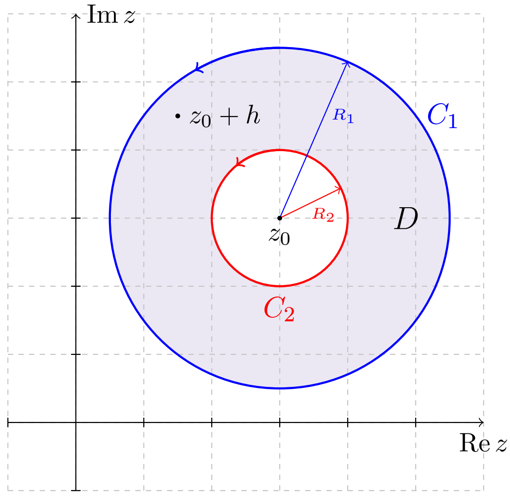
4.3.1 Quelques séries particulières

La liste qui suit contient quelques séries particulières avec leurs domaines de convergence.

1. $e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+...+\frac{z^n}{n!}+... \qquad |z|<+\infty.$
2. $\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+... \qquad |z|<+\infty.$
3. $\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-...(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!}+... \qquad |z|<+\infty.$
4. $\operatorname{Log} z=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-...(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+... \qquad |z|<1.$
5. $\operatorname{Arctg} z=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-...(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}+... \qquad |z|<1.$
6. $(1+z)^p=1+pz+\frac{p(p-1)}{2!}z^2+...+\frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!}z^n+... \qquad |z|<1.$

Si $(1+z)^p$ est multiforme le résultat est valable pour la branche de la fonction qui prend la valeur 1 pour $z=0$.

4.4 Séries de Laurent



Soit C_1 et C_2 des cercles concentriques, de centre z_0 et de rayons respectifs R_1 et R_2.
On suppose que f est uniforme et **holomorphe** sur C_1 et C_2 et également dans la couronne D [ou région annulaire D] limitée par C_1 et C_2.
Les courbes C_1 et C_2 étant décrits dans le sens positif par rapport à leurs intérieurs.

Soit $z_0 + h$ un point quelconque de D, on a alors

$$\begin{aligned} f(z_0+h) = a_0 \quad & + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \ldots \\ & + \frac{a_{-1}}{h} + \frac{a_{-2}}{h^2} + \frac{a_{-3}}{h^3} + \ldots \end{aligned}$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \qquad n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

et $C = C_1$ ou C_2. Avec le changement de notation $z = z_0 + h$, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(z) = a_0 \quad & + a_1 (z-z_0) + a_2 (z-z_0)^2 + a_3 (z-z_0)^3 + \ldots \\ & + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3} + \ldots \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ceci est appelé le théorème de Laurent et la formule ci-dessus est appelée une **série de Laurent** ou un **développement de Laurent**.

La partie

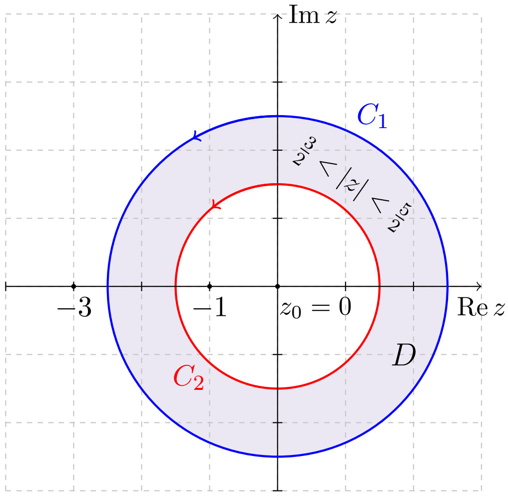
$$a_0 + a_1 (z-z_0) + a_2 (z-z_0)^2 + a_3 (z-z_0)^3 + \ldots$$

est appelée la partie **analytique** de la série de Laurent, cependant que le reste de la série formé des puissances négatives de $z - z_0$;

$$\frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3} + \ldots$$

est appelé la partie **principale**.
Si la partie principale est nulle, la série de Laurent se réduit à une série de Taylor.

Exemple 47



Déterminons le développement en série de Laurent de la fonction $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z+1} - \dfrac{1}{z+3}\right)$

dans la couronne $D = \left\{z \in \mathbb{C},\ \frac{3}{2} < |z| < \frac{5}{2}\right\}$.

La fonction f est holomorphe dans D et sur sa frontière, car les singularités -1 et -3 sont à l'extérieur D. Donc f admet un développement en série de Laurent centré à l'origine $z_0 = 0$.

Si $|z| > \dfrac{3}{2} > 1$, on a

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right) = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \ldots.$$

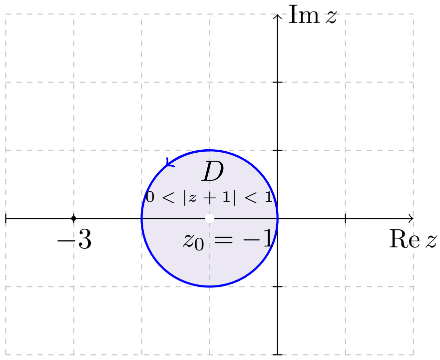
Si $|z| < \dfrac{5}{2} < 3$, on a

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{z}{9} + \frac{z^2}{27} - \ldots.$$

Alors dans la couronne $D = \left\{z \in \mathbb{C},\ \frac{3}{2} < |z| < \frac{5}{2}\right\}$ on a

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3}\right) = \ldots - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{18} - \frac{z^2}{54} + \ldots. \qquad \blacksquare$$

Exemple 48



Développons en série de Laurent la fonction de l'exemple précédent

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

mais dans le disque pointé de $z_0 = -1$,

$D = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z+1| < 1\}$.

Notons que pour tout $0 < |z+1| < 1$ on peut écrire

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z+1+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{z+1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{z+1}{2}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z+1)^n.$$

D'où

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z+1)^{n-1} = \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z+1) - \ldots. \qquad \blacksquare$$

Exemple 49

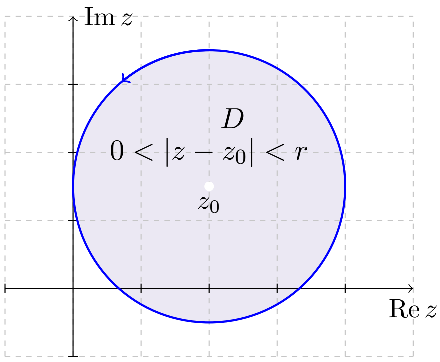
Développons en série de Laurent la fonction $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ dans $\mathbb{C}^*$.

Rappelons que $e^w = \sum_{n\geq 0} \frac{w^n}{n!}, w \in \mathbb{C}$, alors pour $w = \frac{1}{z}$ on a

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n! z^n} = ... + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z} + 1.$$

■

4.4.1 Classification des singularités



Le point z_0 est appelé **singularité isolée**, ou **point singulier isolé** de f, si la fonction f est holomorphe sur un disque pointé de z_0, $D = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z - z_0| < r\}$, $r > 0$.

Il est possible de classer les singularités **isolées** d'une fonction f par l'examen de sa série de Laurent.

Pôles

Si f à la forme (4.2) dans laquelle la partie principale ne possède qu'un nombre fini de termes donnés par

$$\frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + ... + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n},$$

où $a_{-n} \neq 0$, alors $z = z_0$ est appelé un **pôle d'ordre** n.

Si $n = 1$ on a affaire à un **pôle simple**.

Si $z = z_0$ est un pôle de f alors $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Exemple 50

La fonction $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ de l'exemple 48 présente un pôle simple au point $z_0 = -1$. ■

Singularités apparentes

Si une fonction uniforme f n'est pas définie en $z = z_0$ mais si $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe, alors $z = z_0$ est appelée une **singularité apparente**. Dans un pareil cas on définit $f(z)$ pour $z = z_0$ comme étant égal à $\lim_{z \to z_0} f(z)$.

Exemple 51

Si $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ alors $z = 0$ est une singularité apparente car $f(0)$ n'est pas défini mais $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$. On définit $f(0) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$. On remarque que dans ce cas

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left\{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ...\right\} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + ... \qquad \blacksquare$$

Singularités essentielles

Si f est uniforme alors toute singularité qui n'est ni un pôle ni une singularité apparente est appelée une **singularité essentielle**. Si $z = z_0$ est une singularité essentielle de $f(z)$, la partie principale du développement de Laurent possède une **infinité de terme**.

Exemple 52

Le développement de $e^{\frac{1}{z}}$ s'écrivant

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + ...,$$

on en déduit que $z = 0$ est une singularité essentielle. $\blacksquare$

Singularités à l'infini

En posant $z = \dfrac{1}{w}$ dans $f(z)$ on obtient la fonction $f\left(\frac{1}{w}\right) = F(w)$. Alors la nature de la singularité à $z = \infty$ [le point à l'infini] est définie comme étant la même que celle de $F(w)$ en $w = 0$.

Exemple 53

La fonction $f(z) = z^3$ a un pôle triple en $z = \infty$ car $F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \dfrac{1}{w^3}$ possède un pôle triple en $z = 0$. $\blacksquare$

Exemple 54

De la même façon $f(z) = e^z$ possède une singularité essentielle en $z = \infty$ car

$$F(w) = f\left(\tfrac{1}{w}\right) = e^{\frac{1}{w}}$$

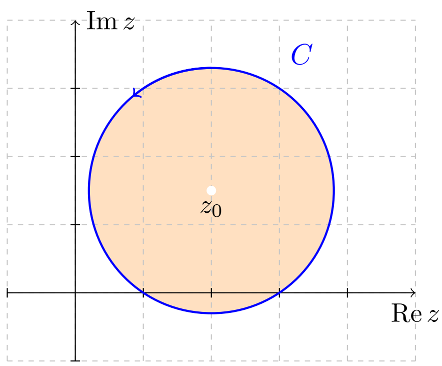
a une singularité essentielle en $w = 0$. $\blacksquare$

Chapitre 5

Théorème des résidus

Sommaire

5.1 Résidus



Soit f une fonction holomorphe et uniforme à l'intérieur d'un cercle C et sur C, **excepté** au point $z = z_0$ centre de C. Alors $f(z)$ possède un développement en série de Laurent dans le voisinage de $z = z_0$, donné par

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \quad & a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \ldots \\ & + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \ldots \end{aligned} \tag{5.1}$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \qquad n = ... - 2, -1, 0, 1, 2, ... \tag{5.2}$$

Dans le cas particulier $n = -1$ on a

$$\oint\limits_C f(z)\, dz = 2\pi i a_{-1}. \tag{5.3}$$

Observons que l'intégrale $\oint\limits_C f(z)\, dz$ s'exprime à l'aide du seul coefficient a_{-1} de (5.1).

On peut obtenir formellement (5.3) à partir de (5.1) par intégration terme à terme en utilisant le résultat

$$\oint\limits_C \frac{1}{(z - z_0)^p} dz = \begin{cases} 2\pi i & p = 1 \\ 0 & p \in \mathbb{Z},\ p \neq 1. \end{cases} \tag{5.4}$$

Définition 45

Avec les notations ci-dessus, le coefficient a_{-1} du développement de Laurent de f au voisinage de z_0 s'appelle le **résidu** de $f(z)$ au point z_0 et se note

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C f(z)\, dz.$$

5.1.1 Calcul des résidus

Pour obtenir le résidu d'une fonction f en $z = z_0$ on pourrait croire d'après (5.1) à la nécessité d'écrire le développement de $f(z)$ en série de Laurent dans le voisinage de $z = z_0$. Dans beaucoup de cas on peut déterminer le résidu sans passer par le développement de Laurent.

Pôle simple

Si $z = z_0$ est un pôle simple le calcul du résidu est particulièrement simple

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \tag{5.5}$$

Exemple 55

Trouver le résidu de $f(z) = \dfrac{z+1}{(z+2)(z-1)}$ en $z = 1$.

Le point $z = 1$ est un pôle simple et le résidu en $z = 1$ est

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z \to 1} (z - 1) \left\{ \frac{z+1}{(z+2)(z-1)} \right\} = \lim_{z \to 1} \frac{z+1}{z+2} = \frac{2}{3}. \qquad \blacksquare$$

Remarque 46

Si $z = z_0$ est un pôle simple et $f(z)$ se présente sous la forme

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad Q(z_0) = 0 \text{ et } Q'(z_0) \neq 0,$$

alors

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}. \tag{5.6}$$

Exemple 56

Trouver le résidu de $f(z) = \dfrac{e^{z+1}}{z^3+1}$ en $z = -1$.

Le point $z = -1$ est un pôle simple et le résidu peut être calculé par la formule (5.6) :

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \frac{\left. e^{z+1} \right|_{z=-1}}{\left. (z^3+1)' \right|_{z=-1}} = \frac{\left. e^{z+1} \right|_{z=-1}}{\left. 3z^2 \right|_{z=-1}} = \frac{e^{1-1}}{3(-1)^2} = \frac{1}{3}.$$

■

Pôle d'ordre $k \geq 2$

Dans le cas où $z = z_0$ est un **pôle d'ordre** $k \geq 2$, le résidu a_{-1} est donné par la formule

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left\{ (z - z_0)^k f(z) \right\}. \tag{5.7}$$

Si $k = 2$ (**pôle double**) le résultat est

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \left\{ (z - z_0)^2 f(z) \right\}. \tag{5.8}$$

Exemple 57

Trouver le résidu de $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ en $z = -1$. Le point $z = -1$ est un pôle double et on a d'après (5.8)

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \lim_{z \to -1} \frac{d}{dz} \left\{ (z+1)^2 \left(\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right) \right\} = -\frac{1}{4}.$$

■

Point singulier essentiel

Si $z = z_0$ est un **point singulier essentiel**, le résidu peut parfois être trouvé en utilisant des développements en série connus.

Exemple 58

Si $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$, alors $z = 0$ est un point singulier essentiel et d'après le développement connu

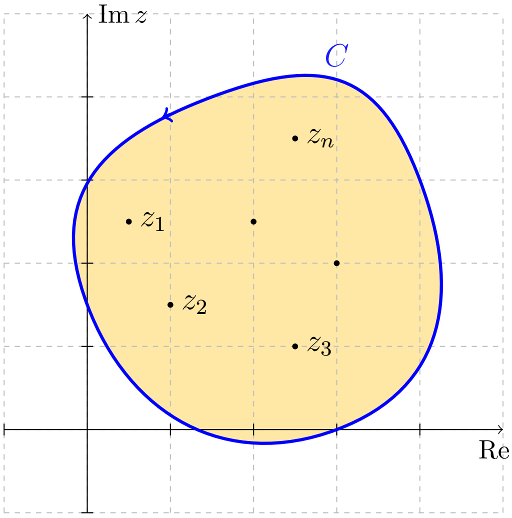
$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + ...$$

avec $u = -\frac{1}{z}$, on trouve

$$e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + ...$$

où l'on voit que le résidu en $z = 0$ étant le coefficient de $\frac{1}{z}$ sa valeur est -1. ■

5.2 Le théorème des résidus



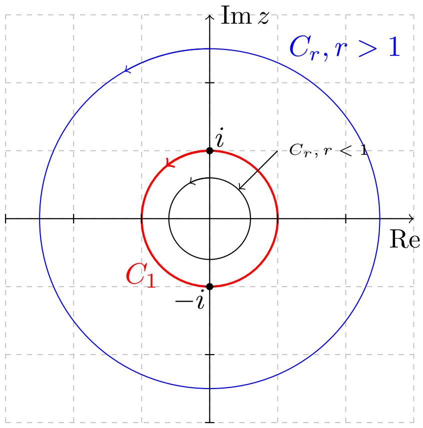
Soit f une fonction uniforme et holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C, sauf en un nombre fini de singularités z_1, z_2, z_3, ... z_n intérieures à C.

Alors le théorème des résidus établit que

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

i.e. L'intégrale de $f(z)$ le long de C est égale à $2\pi i$ fois la somme des résidus de $f(z)$ en les singularités contenues dans C. Notons que le théorème de Cauchy et les formules intégrales sont des cas particuliers de ce théorème.

Exemple 59



Calculer $\oint_{C_r} f(z)\,dz$ où $f(z) = \frac{z^3+1}{z^2+1}$ et C_r le cercle centré à l'origine et de rayon r, $r \neq 1$.

La fonction $f(z) = \frac{z^3+1}{z^2+1}$ possède deux pôles simples $z_1 = i$, $z_2 = -i$ et on a

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{z^3+1\Big|_{z=i}}{(z^2+1)'\Big|_{z=i}} = \frac{z^3+1\Big|_{z=i}}{2z\Big|_{z=i}} = \frac{1-i}{2i} = \frac{-1-i}{2},$$

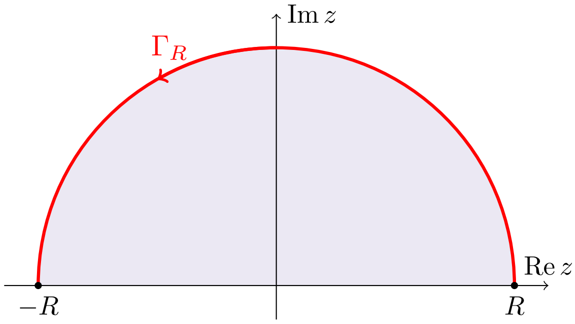
et $$\operatorname{Res}(f, -i) = \frac{z^3+1\Big|_{z=-i}}{(z^2+1)'\Big|_{z=-i}} = \frac{z^3+1\Big|_{z=-i}}{2z\Big|_{z=-i}} = \frac{1+i}{-2i} = \frac{-1+i}{2}.$$

Notons que pour $0 < r < 1$ l'intégrale $\oint\limits_{C_r} \frac{z^3+1}{z^2+1} dz = 0$ car la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur de C_r et sur C_r. Mais, si $r > 1$ on aura

$$\oint\limits_{C_r} \frac{z^3+1}{z^2+1} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i)\right) = 2\pi i \left(\frac{-1-i}{2} + \frac{-1+i}{2}\right) = -2\pi i. \quad \blacksquare$$

5.3 Application du théorème des résidus

5.3.1 Théorèmes particuliers utilisés pour le calcul d'intégrales



Lorsque l'on calcule certaines types d'intégrales, il est souvent nécessaire de montrer que $\int\limits_{\Gamma_R} F(z)\, dz$ et $\int\limits_{\Gamma_R} F(z)\, e^{i\alpha z} dz, \alpha \in \mathbb{R}^*$ tendent vers zéro quand $R \to +\infty$, où Γ_R est un demi-cercle centré à l'origine et de rayon R.

Les proposition suivantes sont fondamentales.

Proposition 47

Si $|F(z)| \leq \frac{M}{R^k}$ pour $z = R\, e^{it}$, où $k > 1$ et M sont des constantes, alors si Γ_R est le demi-cercle de la figure ci-dessus, $\lim\limits_{R \to +\infty} \int\limits_{\Gamma_R} F(z)\, dz = 0$.

Proposition 48

Si $|F(z)| \leq \frac{M}{R^k}$ pour $z = R\, e^{it}$, où $k > 0$ et M sont des constantes, alors si Γ_R est le demi-cercle de la figure ci-dessus, $\lim\limits_{R \to +\infty} \int\limits_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} F(z)\, dz = 0, \alpha \in \mathbb{R}^*$.

5.3.2 Application aux transformées de Fourier

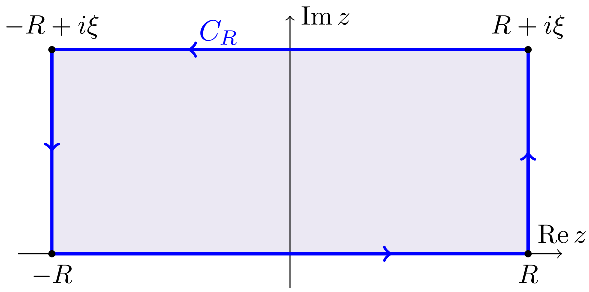
Définition 49

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$.
Sa **transformée de Fourier** est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x} dx.$$

La transformée de Fourier est un outil essentiel des mathématiques appliquées. Elle peut souvent être obtenue via le calcul des résidus.

Exemple 60



Calculons la transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Considérons $\int_{C_R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ où C_R désigne le rectangle d'extrémités $-R, R, R+i\xi$ et $-R+i\xi$, $\xi > 0$.
La fonction $z \mapsto e^{-\frac{z^2}{2}}$ n'a aucune singularité à l'intérieur de C_R, alors $\int_{C_R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$, i.e.

$$\int_{-R}^{R} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{0}^{\xi} e^{-\frac{(R+iy)^2}{2}} idy + \int_{R}^{-R} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx + \int_{\xi}^{0} e^{-\frac{(-R+iy)^2}{2}} idy = 0.$$

On a $\left|\int_{0}^{\xi} e^{-\frac{(R+iy)^2}{2}} idy\right| \leq \int_{0}^{\xi} \left|e^{-\frac{(R+iy)^2}{2}}\right| dy = \int_{0}^{\xi} e^{\frac{-R^2+y^2}{2}} dy \to 0$ quand $R \to +\infty$. De même $\int_{\xi}^{0} e^{-\frac{(-R+iy)^2}{2}} idy \to 0$ quand $R \to +\infty$. Donc, lorsque $R \to +\infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx = 0,$$

il vient alors

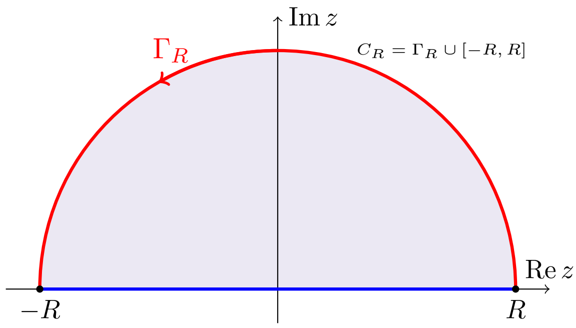
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

On en déduit que

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\xi x} dx = e^{-\frac{\xi^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}. \blacksquare$$

Cas d'une fonction rationnelle

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle intégrable sur $\mathbb{R}$ et $z_k, \operatorname{Im} z_k \neq 0, k = 1, ..., n$ ses pôles.



Pour calculer la transformée de Fourier

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x} dx$$

de la fonction f par la méthode des résidus, on considère $\displaystyle\int_{C_R} f(z)\, e^{-i\xi z} dz$, $\xi < 0$ où C_R désigne la courbe fermée ou le **contour** fermé formé du segment $[-R, +R]$ et du demi cercle Γ_R décrit dans le sens direct.

Si le nombre R est suffisamment grand alors

$$\int_{C_R} f(z)\, e^{-i\xi z} dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}\left(f(z)\, e^{-i\xi z}, z_k\right),$$

i.e.

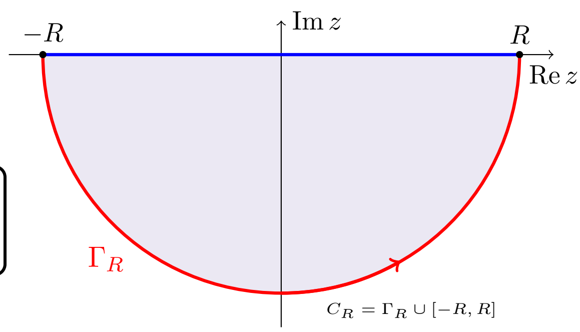
$$\int_{-R}^{R} f(x)\, e^{-i\xi x} dx + \int_{\Gamma_R} f(z)\, e^{-i\xi z} dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}\left(f(z)\, e^{-i\xi z}, z_k\right),$$

Si l'on prend la limite quand $R \to +\infty$ et si l'on utilise le fait que $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\, e^{-i\xi z} dz = 0$, on obtient

$$\boxed{\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}\left(f(z)\, e^{-i\xi z}, z_k\right), \text{ si } \xi < 0.}$$

De même, en choisissant le demi cercle avec des parties imaginaires négatives on obtient

$$\boxed{\hat{f}(\xi) = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k < 0} \operatorname{Res}\left(f(z)\, e^{-i\xi z}, z_k\right), \text{ si } \xi > 0.}$$



Exemple 61

Calculons la transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

On a $z^2+1=0$ pour $z=i$ et $z=-i$, ces valeurs de z sont les pôles simples de $\dfrac{1}{z^2+1}$ et

$$\operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{-i\xi z}}{z^2+1}, i\right) = \frac{e^{-i\xi z}\Big|_{z=i}}{(z^2+1)'\Big|_{z=i}} = \frac{e^{-i\xi z}\Big|_{z=i}}{2z\Big|_{z=i}} = \frac{e^{\xi}}{2i},$$

$$\operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{-i\xi z}}{z^2+1}, -i\right) = \frac{e^{-i\xi z}\Big|_{z=-i}}{(z^2+1)'\Big|_{z=-i}} = \frac{e^{-i\xi z}\Big|_{z=-i}}{2z\Big|_{z=-i}} = \frac{e^{-\xi}}{-2i}.$$

Alors

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} 2\pi i \operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{-i\xi z}}{z^2+1}, i\right), & \text{si } \xi < 0, \\ -2\pi i \operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{-i\xi z}}{z^2+1}, -i\right), & \text{si } \xi > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\pi i \dfrac{e^{\xi}}{2i}, & \text{si } \xi < 0, \\ -2\pi i \dfrac{e^{-\xi}}{-2i}, & \text{si } \xi > 0 \end{cases} = \pi e^{-|\xi|}. \quad \blacksquare$$

5.3.3 Calcul d'intégrales définies diverses

Le calcul d'intégrales définies généralisées peut souvent être effectué en utilisant le **théorème des résidus** appliqué à une **fonction** et à un **contour** convenables dont le choix peut demander une grande **ingéniosité**.

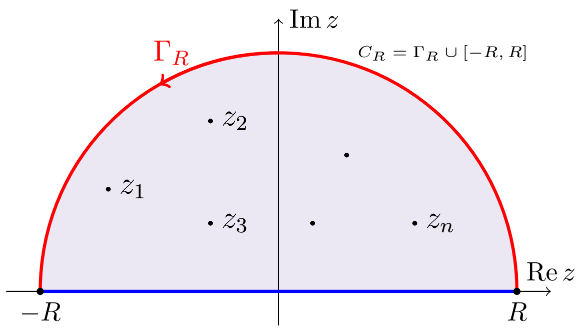
Les types d'intégrales qui suivent sont souvent rencontrées dans la pratique.

Intégrale du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

Soit $f(z)$ une fonction complexe holomorphe dans le demi plan $\operatorname{Im} z \geq 0$ sauf en un nombre fini de points singuliers isolés $z_1, z_2, ..., z_n$ de demi plan $\operatorname{Im} z > 0$. On suppose de plus que $|f(z)| \leq \dfrac{M}{R^k}$ pour $z = R\,e^{it}$, $k > 1$ et $M > 0$.

On considère $\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz$, où C_R désigne le contour fermé formé du segment $[-R, +R]$ et du demi cercle Γ_R décrit dans le sens direct.

Si le nombre R est pris suffisamment grand alors



le théorème des résidus permet d'écrire

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_k),$$

i.e.

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_k).$$

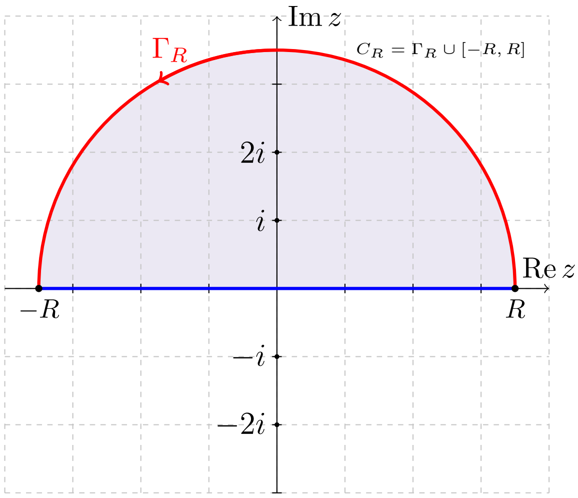
D'après la proposition 47, $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0$. Alors lorsque $R \to +\infty$, on obtient

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_k).}$$

Remarque 50

Si $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont des polynômes avec $\deg Q \geq 2 + \deg P$, et aucun des zéros de Q n'étant réel, alors la formule précédente est valable, les z_k étant les zéros de Q tels que $\operatorname{Im} z_k > 0$.

Exemple 62



Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$.

Les pôles de $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$ situés à l'intérieur du contour C_R sont les pôles simples $z = i$ et $z = 2i$ et on a

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z\to i}\left\{(z-i)\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}\right\} = \frac{i}{6},$$

$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \lim_{z\to 2i}\left\{(z-2i)\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}\right\} = \frac{-i}{3}.$$

Si R est suffisamment grand alors d'après le théorème des résidus

$$\int_{C_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}dz = 2\pi i \{\operatorname{Res}(f,i) + \operatorname{Res}(f,2i)\} = 2\pi i \left\{\frac{i}{6} - \frac{i}{3}\right\} = \frac{\pi}{3}.$$

i.e.

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx + \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}dz = \frac{\pi}{3}.$$

Comme $\lim_{R\to+\infty} R^2 \left|f\left(R\, e^{it}\right)\right| = 1$, alors $|f(z)| \leq \dfrac{M}{R^2}$ pour $z = R\, e^{it}$, $M > 0$. Donc d'après la proposition 47,

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = 0.$$

Par conséquent, lorsque $R \to +\infty$, on obtient

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{3}. \qquad \blacksquare$$

Intégrale du type $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt$

Soit $R(x,y)$ une fonction rationnelle en x et en y qui n'a pas de pôles sur le cercle $x^2+y^2=1$. Si on pose $z = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$, alors $\sin t = \dfrac{z - z^{-1}}{2i}$, $\cos t = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$ et $dz = ie^{it}dt$ ou $dt = \dfrac{1}{iz}dz$. Par conséquent

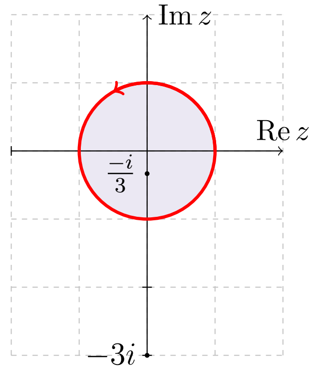
$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{iz} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) dz.$$

Posons $f(z) = \dfrac{1}{iz} R\left(\dfrac{z+z^{-1}}{2}, \dfrac{z-z^{-1}}{2i}\right)$, on a alors d'après le théorème des résidus

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(f(z), z_k\right),$$

où les z_k sont les pôles de la fraction rationnelle $f(z)$ qui appartiennent à l'intérieur du cercle $|z| = 1$.

Exemple 63



Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t} dt$.

Pour calculer cette intégrale on va appliquer la méthode ci-dessus qui consiste à poser $z = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t} dt &= \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{iz\left(5+3\dfrac{z-z^{-1}}{2i}\right)} dz = \int\limits_{|z|=1} \frac{2}{3z^2+10iz-3} dz \\ &= \int\limits_{|z|=1} \frac{2}{(3z+i)(z+3i)} dz.\end{aligned}$$

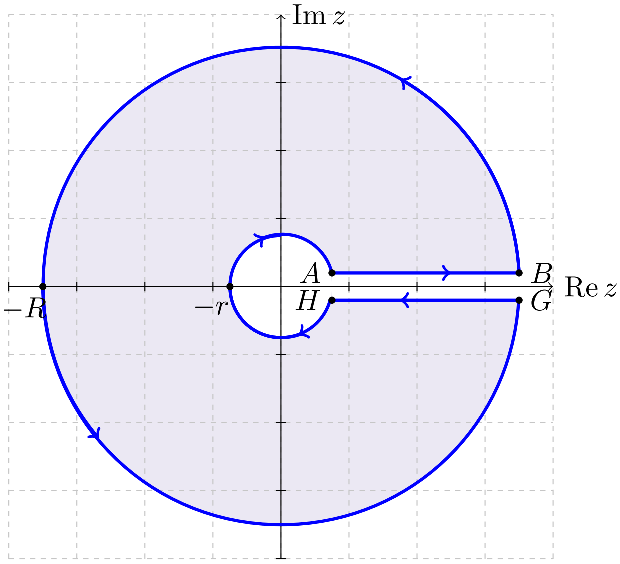
Puisque le nombre $\dfrac{-i}{3}$ est le seul pôle de $\dfrac{2}{(3z+i)(z+3i)}$ qui appartient à l'intérieur du cercle $|z| = 1$, alors par le théorème des résidus

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t} dt = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{2}{(3z+i)(z+3i)}, \frac{-i}{3}\right) = 2\pi i \frac{2}{3\left(\frac{-i}{3}+3i\right)} = \frac{\pi}{2}. \qquad \blacksquare$$

Intégrale du type $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-1} dx$

Soit α un réel strictement positif. Soient P et Q deux polynômes avec $\deg Q > \alpha + \deg P$, tels que $P(0) \neq 0$ et aucun des zéros de Q n'étant réel positif ou nul. Si z_k, $k = 1, ..., n$ sont des points singuliers de $\dfrac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-1}$, alors $\operatorname{Re} z_k \notin [0, +\infty[$.

On va considérer cette fois la fonction $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1}$, $\operatorname{Arg}(\operatorname{Log} z) \in]-\pi, \pi[$, et le contour $C_{R,r}$ de la figure ci-contre où l'axe réel positif est la coupure et où AB et GH coïncident avec l'axe des x mais sont montrés séparés pour une meilleure compréhension. Le contour $C_{R,r} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [R, r] \cup \Gamma_r$ où Γ_R et Γ_r sont des cercles centrés à l'origine de rayons R et r.



Si R est assez grand et r est assez petit, alors le théorème des résidus permet d'écrire

$$\int_{C_{R,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1}, z_k\right).$$

On a

$$\begin{aligned}\int_{C_{R,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz = & \int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)} e^{(\alpha-1)i\pi} x^{\alpha-1} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz \\ & + \int_R^r \frac{P(x)}{Q(x)} e^{-(\alpha-1)i\pi} x^{\alpha-1} dx - \int_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz.\end{aligned}$$

Lorsque $r \to 0$, on obtient

$$\lim_{r\to 0} \left| \int_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz \right| = \lim_{r\to 0} \left| \int_0^{2\pi} \frac{P(r\,e^{it})}{Q(r\,e^{it})} \left(-r\,e^{it}\right)^{\alpha-1} r\,e^{it} dt \right| \leq \lim_{r\to 0} K\,r^{\alpha} = 0.$$

Quand $R \to +\infty$

$$\lim_{R\to+\infty} \left| \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz \right| = \lim_{R\to+\infty} \left| \int_0^{2\pi} \frac{P(R\,e^{it})}{Q(R\,e^{it})} \left(-R\,e^{it}\right)^{\alpha-1} R\,e^{it} dt \right| \leq \lim_{R\to+\infty} K\,R^{\beta} = 0,$$

où $\beta = \alpha + \deg P - \deg Q < 0$. On en déduit que

$$e^{-(\alpha-1)i\pi} \int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-1} dx + e^{(\alpha-1)i\pi} \int_{+\infty}^{0} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-1} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1}, z_k\right).$$

Par conséquent

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-1} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}(-z)^{\alpha-1}, z_k\right).}$$

Exemple 64

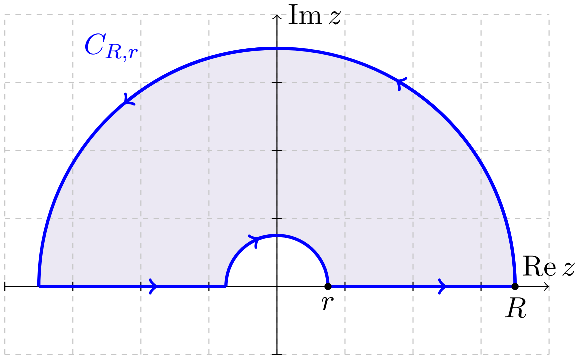
Par application de la formule précédente on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \text{Res}\left(\frac{(-z)^{\alpha-1}}{z+1}, -1\right) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, 0 < \alpha < 1. \qquad \blacksquare$$

Intégrale du type $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx, \alpha > 0$

Soit $\frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle dont le dénominateur $Q(x)$ ne possède pas des racines réelles et $\deg Q \geq \deg P$.

Considérons la fonction $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z}$ et le contour $C_{R,r}$ de la figure ci-contre, $C_{R,r} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [-R, -r] \cup \Gamma_r$ où Γ_R et Γ_r sont des demi cercles centrés à l'origine de rayons R et r. Donc, d'après le théorème des résidus on obtient



$$\begin{aligned}
\int_{C_{R,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz &= \int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx - \int_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz \\
&= 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z}, z_k\right).
\end{aligned}$$

Notons que si on procède comme ci-dessus on vérifie que l'intégrale $\int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz$ tend vers zéro quand R tend vers $+\infty$.

Pour l'intégrale sur Γ_r on a

$$\lim_{r\to 0} \int_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz = \lim_{r\to 0} \int_0^{\pi} \frac{P(re^{it})}{Q(re^{it})} \frac{e^{i\alpha re^{it}}}{re^{it}} ire^{it} dt = i\pi \frac{P(0)}{Q(0)}.$$

Donc si on fait tendre r vers zéro et R vers $+\infty$ on obtient

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = i\pi \frac{P(0)}{Q(0)} + 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z}, z_k\right).}$$

Exemple 65

Calculons $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)\,x} dx.$

Puisque le nombre i est le seul pôle de $\frac{e^{iz}}{(z^2+1)\,z}$ avec partie imaginaire strictement positive, alors par application de la formule précédente on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)\,x} dx = i\pi + 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)\,z}, i\right) = i\pi\left(1-e^{-1}\right).$$

Notons que

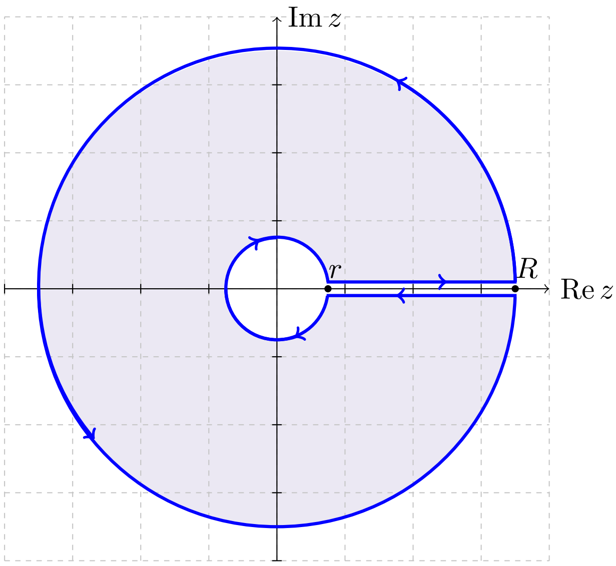
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)\,x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)\,x} dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)\,x} dx = 2i\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)\,x} dx.$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)\,x} dx = \left(1-e^{-1}\right)\frac{\pi}{2}.$$

■

Intégrale du type $\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \textbf{Log}\, x dx$



Soit $\frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle dont le dénominateur $Q(x)$ ne possède pas de racines réelles positives ou nulles, $P(0) \neq 0$ et $\deg Q \geq 2 + \deg P$.

On considère la fonction $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2$, et le contour $C_{R,r} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [R, r] \cup \Gamma_r$ de la figure ci-contre où Γ_R et Γ_r sont des cercles centrés à l'origine de rayons R et r.

Si R est assez grand et r est assez petit, alors par le théorème des résidus

$$\begin{aligned}\int_{C_{R,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2 dz &= \int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)} (\operatorname{Log} x)^2 dx + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz + \int_R^r \frac{P(x)}{Q(x)} (\operatorname{Log} x + 2\pi i)^2 dx - \int_{\Gamma_r} f(z)\,dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2, z_k\right).\end{aligned}$$

Comme précédemment les intégrales sur Γ_r et Γ_R tendent vers zéro lorsque $r \to 0$ et $R \to +\infty$.

On obtient alors la relation

$$\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} (\operatorname{Log} x)^2 dx - \int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} (\operatorname{Log} x + 2\pi i)^2 dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2, z_k\right).$$

D'où

$$-2\int_0^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\operatorname{Log} x\,dx-2\pi i\int_0^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}(\operatorname{Log} z)^2,z_k\right).$$

Alors

$$\boxed{\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\operatorname{Log} x\,dx&=\frac{-1}{2}\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}(\operatorname{Log} z)^2,z_k\right)\right),\\ \int_0^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx&=\frac{-1}{2\pi}\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}(\operatorname{Log} z)^2,z_k\right)\right).\end{aligned}}$$

Exemple 66

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{Log} x}{(x+1)^3}dx$.

Ici $P(x)=1$ et $Q(x)=(x+1)^3$, toutes les conditions sont vérifiées, d'où

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^3}\operatorname{Log} x\,dx=\frac{-1}{2}\operatorname{Re}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z+1)^3}(\operatorname{Log} z)^2,-1\right)\right),$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^3}dx=\frac{-1}{2\pi}\operatorname{Im}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z+1)^3}(\operatorname{Log} z)^2,-1\right)\right).$$

Comme -1 est un pôle triple, pour le résidu on a donc

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z+1)^3}(\operatorname{Log} z)^2,-1\right)&=\frac{1}{2!}\lim_{z\to-1}\left((z+1)^3\frac{(\operatorname{Log} z)^2}{(z+1)^3}\right)''\\&=\frac{1}{2}\lim_{z\to-1}\left((\operatorname{Log} z)^2\right)''=\lim_{z\to-1}\frac{1-\operatorname{Log} z}{z^2}\\&=\frac{1-\operatorname{Log}(-1)}{(-1)^2}=1-(0+i\pi)=1-i\pi.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{Log} x}{(x+1)^3}dx=\frac{-1}{2},$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^3}dx=\frac{1}{2}.$$

■

Références

[1] **Amroun N.** Cours de Fonctions de variables complexes. Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbes Algérie, 2009.

[2] **Beck M., Marchesi G., Pixton D. and Sabalka L.** A First Course in Complex Analysis. San Francisco State University, San Francisco, CA, USA and Binghamton University, Binghamton, NY, USA, 2012.

[3] **Giroux A.** Analyse complexe. Département de mathématiques et statistique, Université de Montréal, 2004.

[4] **Murray R. S.** Variables complexes : cours et problèmes, volume 12 de Série Schaum, New York 1973.