

Série d'exercices n° 0 : Nombres complexes

Exercice 1 : Soient $z = 2 - i, w = 1 + 3i$.

Écrire les nombres complexes suivants sous forme $x + iy$.

a) $\frac{z}{w}$, b) $\frac{zw}{z+w}$.

Solution. Pour écrire un quotient de deux nombres complexes sous forme algébrique $x + iy$, on multiplie et on divise par le conjugué du dénominateur. Noter que le conjugué de $a + ib$ est $a - ib$.

a) $\frac{z}{w} = \frac{2-i}{1+3i} = \frac{(2-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{2-6i-i+3i^2}{1^2-(3i)^2} = \frac{2-7i-3}{1+9} = \frac{-1-7i}{10} = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$.

b) $\frac{zw}{z+w} = \frac{(2-i)(1+3i)}{2-i+1+3i} = \frac{5+5i}{3+2i} = \frac{(5+5i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{25}{13} + \frac{5}{13}i$.

Exercice 2 : Trouver le module et l'argument principal des nombres complexes suivants:

a) $z = 4 + 3i$, b) $z = -\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$, c) $z = \cos \theta - i \sin \theta$ ($\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$).

Solution. Le module ou la valeur absolue d'un nombre complexe $a+ib$ est définie par $r = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$.

L'argument principale d'un nombre complexe non nul $a+ib$ est l'angle $\theta \in]-\pi, \pi]$ définie par

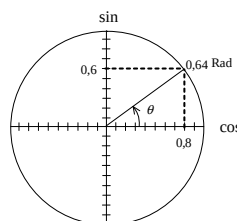
$$\cos \theta = \frac{a}{r}, \sin \theta = \frac{b}{r}.$$

a)

$$r = |4+3i| = \sqrt{4^2+3^2} = 5,$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5}, \sin \theta = \frac{3}{5},$$

alors l'argument principale $\theta \simeq 0,64$ Rad.



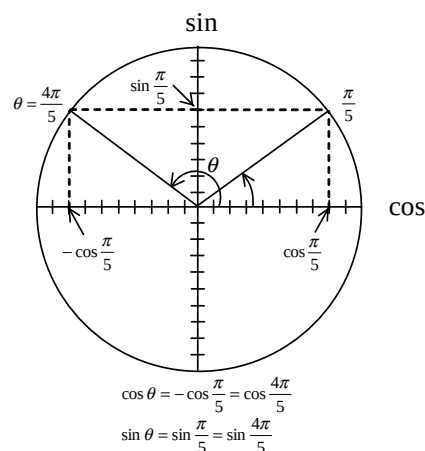
b)

$$\begin{aligned} r &= \left| -\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right| = \sqrt{\left(-\cos \frac{\pi}{5}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{\pi}{5}} = 1, \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{-\cos \frac{\pi}{5}}{1} = -\cos \frac{\pi}{5} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{5} \right) = \cos \left(\frac{4\pi}{5} \right),$$

$$\sin \theta = \frac{\sin \frac{\pi}{5}}{1} = \sin \frac{\pi}{5} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{5} \right) = \sin \left(\frac{4\pi}{5} \right),$$

$$\text{d'où l'argument principale } \theta = \frac{4\pi}{5}.$$



c)

On note l'argument de z par ϕ pour ne pas confondre avec θ .

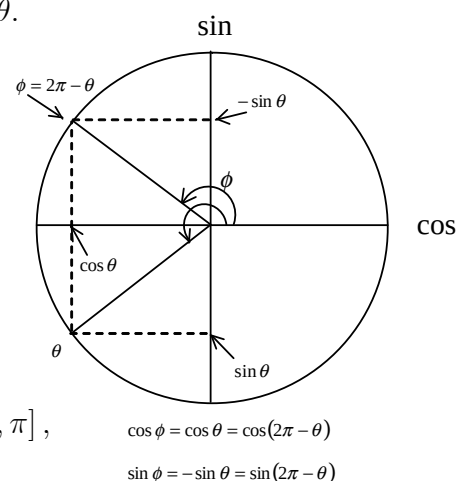
$$\begin{aligned} r = |\cos \theta - i \sin \theta| &= \sqrt{(\cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1, \end{aligned}$$

$$\cos \phi = \frac{\cos \theta}{1} = \cos \theta = \cos(-\theta) = \cos(2\pi - \theta),$$

$$\sin \phi = \frac{-\sin \theta}{1} = -\sin \theta = \sin(-\theta) = \sin(2\pi - \theta),$$

On a ajouté 2π à $-\theta$ pour que ϕ soit dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$,

alors l'argument principale de z est $\phi = 2\pi - \theta$.



Exercice 3 : Représenter les ensembles des points suivants dans le plan complexe.

- a)** $\{z \in \mathbb{C} / |z - 3i| \leq |z - 3|\}$, **b)** $\{z \in \mathbb{C} / |z - i| < 3\}$, **c)** $\{z \in \mathbb{C} / |z - i| > 3\}$,
d) $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) < 1\}$.

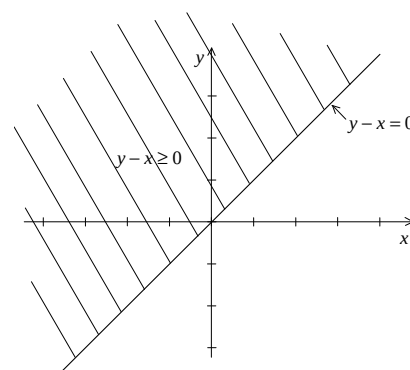
Solution.

a)

Si $z = x + iy$, l'inégalité $|z - 3i| \leq |z - 3|$ devient alors, en prenant le carré de deux membres

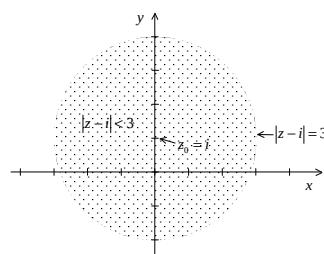
$$x^2 + (y - 3)^2 \leq (x - 3)^2 + y^2 \quad \text{ou} \quad -6y \leq -6x.$$

D'où $y - x \geq 0$. L'ensemble $|z - 3i| \leq |z - 3|$ est donc la partie dessus de la droite $y - x = 0$, la droite y comprise. Dans la figure ci-contre, c'est la partie hachurée.



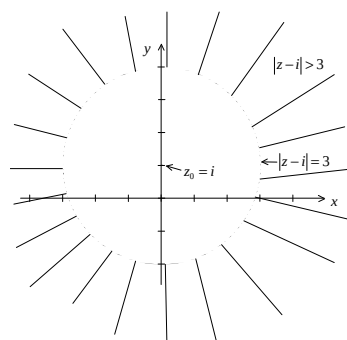
b)

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} / |z - i| < 3\}$ est un disque de centre $z_0 = i \equiv (0, 1)$ et de rayon $r = 3$, le cercle $|z - i| = 3$ non compris. Voir la figure ci-contre.



c)

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} / |z - i| > 3\}$ est l'extérieur du cercle de centre $z_0 = i \equiv (0, 1)$ et de rayon $r = 3$, le cercle non compris. C'est la partie hachurée dans la figure ci-contre.



d)

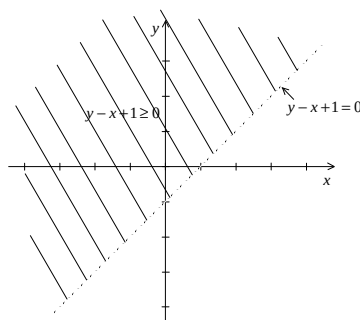
L'ensemble $\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im} z < 1$ s'écrit sous forme

$$x - y < 1 \text{ ou } y - x + 1 > 0.$$

C'est la partie dessus de la droite $y - x + 1 = 0$,

la droite non comprise.

Voir la partie hachurée dans la figure ci-contre.



Exercice 4 : Résoudre les équations : **a)** $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = 0$, **b)** $(z - 1)^4 = 1$.

Solution.

a) Tout d'abord, on remarque que $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = (z + 1)^3 + 2$, donc notre problème revient à résoudre l'équation $(z + 1)^3 = -2$. En écrivant -2 sous forme polaire,

$$(z + 1)^3 = 2 \{ \cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi) \}, k \in \mathbb{Z},$$

alors, d'après la formule de De Moivre, $z + 1 = 2^{\frac{1}{3}} \left\{ \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) \right\}, k \in \mathbb{Z}$ ou

$$z = 2^{\frac{1}{3}} \left\{ \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) \right\} - 1, k \in \mathbb{Z}.$$

Si $k = 0$, $z = z_0 = 2^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) - 1 = 2^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 1$.

Si $k = 1$, $z = z_1 = 2^{\frac{1}{3}} (\cos \pi + i \sin \pi) - 1 = -2^{\frac{1}{3}} - 1$.

Si $k = 2$, $z = z_2 = 2^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) - 1 = 2^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 1$.

En considérant $k = 3, 4, \dots$ aussi bien que des valeurs négatives $-1, -2, \dots$ on retrouve les trois valeurs de z déjà obtenues. Ce sont donc les seules solutions ou racines de l'équation donnée. En général, pour les racines n -ièmes, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, et il y en a n .

b) Sous forme polaire $1 = \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi) = (z - 1)^4, k \in \mathbb{Z}$. D'après la formule de De Moivre,

$$z - 1 = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4} \text{ ou } z = 1 + \cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3.$$

Si $k = 0$, $z = z_0 = 1 + \cos 0 + i \sin 0 = 1 + 1 = 2$.

Si $k = 1$, $z = z_1 = 1 + \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 1 + i$.

Si $k = 2$, $z = z_2 = 1 + \cos \pi + i \sin \pi = 1 - 1 = 0$.

Si $k = 3$, $z = z_3 = 1 + \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = 1 - i$.

Exercice 5 : Donner les nombres complexes suivants sous forme $x + iy$.

a) $(1 + i)^{1000}$, **b)** $(\sqrt{3} - i)^3 (-1 + i\sqrt{3})^{-5}$

Solution.

a) Sous forme polaire $1 + i = \sqrt{2} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \right\}$. En élevant à la puissance 1000 les deux membres de cette égalité et à l'aide de la formule de De Moivre

$$\begin{aligned} (1 + i)^{1000} &= \sqrt{2}^{1000} \left\{ \cos \left(1000 \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \right) + i \sin \left(1000 \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \right) \right\} \\ &= \sqrt{2}^{1000} \left\{ \cos (250\pi + 2000k\pi) + i \sin (250\pi + 2000k\pi) \right\} \\ &= 2^{500} (1 + i0) = 2^{500}. \end{aligned}$$

b) Sous forme polaire

$$\begin{aligned} \sqrt{3} - i &= 2 \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) \right\}, \\ -1 + i\sqrt{3} &= 2 \left\{ \cos \left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right) \right\}. \end{aligned}$$

D'après la formule de De Moivre,

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - i)^3 &= 2^3 \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{2} + 6k\pi \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} + 6k\pi \right) \right\}, \\ (-1 + i\sqrt{3})^{-5} &= 2^{-5} \left\{ \cos \left(-\frac{10\pi}{3} - 10k\pi \right) + i \sin \left(-\frac{10\pi}{3} - 10k\pi \right) \right\}. \end{aligned}$$

Si on a deux nombres complexes s'écrivant sous forme polaire $z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_2)$ et $z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, alors le produit $z_1 z_2 = r_1 r_2 \{ \cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2) \}$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - i)^3 (-1 + i\sqrt{3})^{-5} &= 2^3 2^{-5} \left\{ \cos \left(-\frac{23\pi}{6} - 4k\pi \right) + i \sin \left(-\frac{23\pi}{6} - 4k\pi \right) \right\} \\ &= 2^{-2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2^{-2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8}i. \end{aligned}$$

=====

Exercice 6 : Calculer $i^{\frac{1}{6}}$ et représenter les résultats dans le plan complexe.

Solution. $i = \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \quad k \in \mathbb{Z}$.

$$i^{\frac{1}{6}} = \cos \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, \dots, 5.$$

Si $k = 0$, $z = z_0 = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \simeq 0.97 + 0.26i$.

Si $k = 1$, $z = z_1 = \cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \simeq 0.26 + 0.97i$.

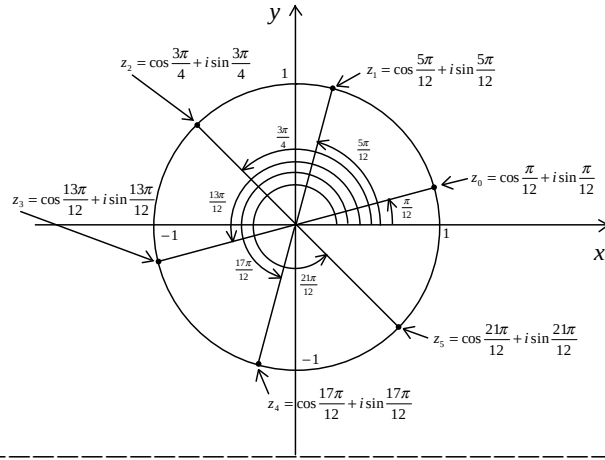
Si $k = 2$, $z = z_2 = \cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \right) = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Si $k = 3$, $z = z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12} + \pi\right) = \cos\frac{13\pi}{12} + i \sin\frac{13\pi}{12} \simeq -0.97 - 0.26i$.

Si $k = 4$, $z = z_4 = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{17\pi}{12} + i \sin\frac{17\pi}{12} \simeq -0.26 - 0.97i$.

Si $k = 5$, $z = z_5 = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{3}\right) = \cos\frac{21\pi}{12} + i \sin\frac{21\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Ces racines sont représentées dans la figure ci-contre. On notera qu'elles sont également réparties sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine.



Exercice 7 :

Calculer les sommes suivantes:

a) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$, **b)** $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$.

Solution. Posons $C_n = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$ et $S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$. Si $z = \cos x + i \sin x$, alors d'après la formule de De Moivre,

$$z^2 = \cos 2x + i \sin 2x, \quad z^3 = \cos 3x + i \sin 3x, \dots, z^n = \cos nx + i \sin nx.$$

Par addition membre à membre de ces formules,

$$\begin{aligned} z + z^2 + \dots + z^n &= \cos x + i \sin x + \cos 2x + i \sin 2x + \dots + \cos nx + i \sin nx \\ &= C_n + iS_n. \end{aligned}$$

Le terme à gauche est la somme de n termes d'une suite géométrique de raison $r = z$ et de premier terme z . Cette somme peut s'écrire sous la forme

$$z + z^2 + \dots + z^n = z \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{z - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Alors $C_n = \operatorname{Re} \left(\frac{z - z^{n+1}}{1 - z} \right)$ et $S_n = \operatorname{Im} \left(\frac{z - z^{n+1}}{1 - z} \right)$, donc il nous reste à séparer les parties réelle et imaginaire de $\frac{z - z^{n+1}}{1 - z}$.

Nous avons

$$\frac{z - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{(z - z^{n+1}) z^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{n+1}{2}} z^{\frac{n+1}{2}}}{(1 - z) z^{-\frac{1}{2}}} = \frac{z^{\frac{n+1}{2}} (z^{-\frac{n}{2}} - z^{\frac{n}{2}})}{(z^{-\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}})}.$$

Puisque $z^{-\frac{n}{2}} - z^{\frac{n}{2}} = -2i \sin \frac{nx}{2}$ et $z^{\frac{n+1}{2}} = \cos \left(\frac{n+1}{2}x \right) + i \sin \left(\frac{n+1}{2}x \right)$, alors

$$\frac{z - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{-2i \sin \frac{nx}{2} \left\{ \cos \left(\frac{n+1}{2}x \right) + i \sin \left(\frac{n+1}{2}x \right) \right\}}{-2i \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \left(\frac{n+1}{2}x \right)}{\sin \frac{x}{2}} + i \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \left(\frac{n+1}{2}x \right)}{\sin \frac{x}{2}}.$$

D'où

$$C_n = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \left(\frac{n+1}{2}x \right)}{\sin \frac{x}{2}},$$

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \left(\frac{n+1}{2}x \right)}{\sin \frac{x}{2}}.$$

=====