

Série d'exercices n° 1 : Fonctions élémentaires

**Exercice 1** : Séparer les parties réelles et imaginaires des fonctions suivantes :

a)  $f(z) = e^{-z}$ , b)  $f(z) = \sin z$ , c)  $f(z) = 2^{z^2}$ , d)  $f(z) = \operatorname{ch}(z - i)$ , e)  $f(z) = z^{2-i}$ .

**Exercice 2** : Démontrer les relations suivantes :

a)  $|\sin z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}$ , b)  $|\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$ ,  
c)  $|\operatorname{sh} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y}$ , d)  $|\operatorname{ch} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \sin^2 y}$ .

**Exercice 3** : Trouver toutes les valeurs  $z = x + iy$  telles que

a)  $\sin z$  soit réel, b)  $\operatorname{sh} z$  soit imaginaire pur.

**Exercice 4** : Démontrer que  $e^{(\operatorname{Log} z)} = z$  et montrer que

l'égalité  $\operatorname{Log}(e^z) = z$  n'est pas toujours vérifiée.

**Exercice 5** : Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

a)  $\sin z = \frac{4}{3}i$ , b)  $\operatorname{sh} z = \frac{i}{2}$ , c)  $e^z = -2$ .

**Exercice 6** : Calculer

a)  $\operatorname{Log}(1 + i)$ , b)  $i^i$ , c)  $(1 - i)^{3-3i}$  ..

**Exercice 7** : Calculer les limites suivantes :

a)  $\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\operatorname{ch}(iz) + i \operatorname{sh}(iz)}$ , b)  $\lim_{z \rightarrow -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z} + 1}{e^z + i}$ .

**Exercice 8** : Montrer que la limite  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$  n'existe pas.