Série d'exercices N° 1 : Fonctions élémentaires

==

Exercice 1 : Séparer les parties réelles et imaginaires des fonctions suivantes :

a) $f(z) = e^{-z}$, **b)** $f(z) = \sin z$, **c)** $f(z) = 2^{z^2}$, **d)** $f(z) = \mathrm{ch}(z-i)$, **e)** $f(z) = z^{2-i}$.

Solution. **a)** $f(z) = e^{-z} = e^{-(x+iy)} = e^{-x}e^{-iy} = e^{-x}(\cos y - i\sin y) = e^{-x}\cos y - ie^{-x}\sin y$,

b)
$$f(z) = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i}$$
$$= \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2i} = \frac{(e^{-y} - e^{y})\cos x}{2i} + \frac{i(e^{-y} + e^{y})\sin x}{2i}$$
$$= i\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\cos x + \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\sin x = \mathrm{ch}(y)\sin x + i\,\mathrm{sh}(y)\cos x.$$

Autre méthode : $\sin z = \sin(x+iy) = \sin x\cos(iy) + \cos x\sin(iy)$.

Puisque $\cos(iy) = \mathrm{ch}(y)$ et $\sin(iy) = i\,\mathrm{sh}(y)$, on trouve $\sin z = \sin x\,\mathrm{ch}(y) + i\cos x\,\mathrm{sh}(y)$.

c) $f(z) = 2^{z^2} = e^{z^2\mathrm{Log}(2)} = e^{(x+iy)^2(\ln(2)+2ik\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$
$$= e^{\left(x^2-y^2+2ixy\right)(\ln(2)+2ik\pi)} = e^{\left(x^2-y^2\right)\ln(2)-4k\pi xy+2i\left\{\left(x^2-y^2\right)k\pi+xy\ln 2\right\}}$$
$$= e^{\left(x^2-y^2\right)\ln(2)-4k\pi xy}\left\{\cos\left[2\left(x^2-y^2\right)k\pi + 2xy\ln 2\right] + i\sin\left[2\left(x^2-y^2\right)k\pi + 2xy\ln 2\right]\right\}.$$

Pour la détermination principale ($k=0$), $f(z) = 2^{\left(x^2-y^2\right)}\left\{\cos(2xy\ln 2) + i\sin(2xy\ln 2)\right\}$.

d) $f(z) = \mathrm{ch}(z-i) = \mathrm{ch}(x + i(y-1)) = \mathrm{ch}(x)\ \mathrm{ch}(i(y-1)) + \mathrm{sh}(x)\ \mathrm{sh}(i(y-1))$.

En notant que $\mathrm{ch}(i(y-1)) = \cos(y-1)$ et $\mathrm{sh}(i(y-1)) = i\sin(y-1)$, on obtient
$$f(z) = \mathrm{ch}\,x\cos(y-1) + i\ \mathrm{sh}\,x\sin(y-1).$$

e) $f(z) = z^{2-i} = e^{(2-i)\mathrm{Log}(z)} = e^{(2-i)(\ln(|z|)+i\arg(z))} = e^{2\ln(|z|)+\arg(z)+i(2\arg(z)-\ln(|z|))}$
$$= e^{2\ln(|z|)+\arg(z)}\left\{\cos(2\arg(z) - \ln|z|) + i\sin(2\arg(z) - \ln|z|)\right\}.$$

Puisque $\arg(z)$ peut s'écrire sous forme $\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ et $\ln(|z|) = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$, on trouve

$\mathrm{Re}(f(z)) = \left(x^2+y^2\right)e^{\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}\cos\left(2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right)$ et

$\mathrm{Im}(f(z)) = \left(x^2+y^2\right)e^{\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}\sin\left(2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right)$

Noter que $\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, et donc f est une fonction multiforme.

==

Exercice 2 : Démontrer les relations suivantes :

a) $|\sin z| = \sqrt{\mathrm{ch}^2 y - \cos^2 x}$, **b)** $|\cos z| = \sqrt{\mathrm{ch}^2 y - \sin^2 x}$,

c) $|\mathrm{sh}\ z| = \sqrt{\mathrm{ch}^2 x - \cos^2 y}$, **d)** $|\mathrm{ch}\ z| = \sqrt{\mathrm{ch}^2 x - \sin^2 y}$.

Solution. Nous pouvons calculer le module d'un nombre complexe w, soit par définition en identifiant ses parties réelles et imaginaires ou par la propriété $|w|^2 = w\overline{w}$.

Nous allons utiliser la propriété $|w|^2 = w\overline{w}$ ici.

- **a)** $|\sin z|^2 = \sin z\overline{\sin z} = \left(\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)\left(\dfrac{e^{-i\overline{z}} - e^{i\overline{z}}}{-2i}\right) = \dfrac{e^{i(z-\overline{z})} - e^{i(z+\overline{z})} - e^{-i(z+\overline{z})} + e^{-i(z-\overline{z})}}{4}.$
  Puisque $z - \overline{z} = 2iy$ et $z + \overline{z} = 2x$, on a
  $|\sin z|^2 = \dfrac{e^{-2y} - e^{2ix} - e^{-2ix} + e^{2y}}{4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{2y} + e^{-2y}}{2} - \dfrac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(2y) - \cos(2x)\right).$
  En utilisant les transformations $\operatorname{ch}(2y) = 2\operatorname{ch}^2 y - 1$ et $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, on trouve le résultat demandé $|\sin z|^2 = \dfrac{1}{2}\left(2\operatorname{ch}^2 y - 1 - (2\cos^2 x - 1)\right) = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x.$

- **b)**
$$\begin{aligned}|\cos z|^2 &= \cos z\overline{\cos z} = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)\left(\frac{e^{-i\overline{z}} + e^{i\overline{z}}}{2}\right) = \frac{e^{i(z-\overline{z})} + e^{i(z+\overline{z})} + e^{-i(z+\overline{z})} + e^{-i(z-\overline{z})}}{4}\\ &= \frac{e^{-2y} + e^{2ix} + e^{-2ix} + e^{2y}}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2} + \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(2y) + \cos(2x)\right).\end{aligned}$$

  Par les transformations $\operatorname{ch}(2y) = 2\operatorname{ch}^2 y - 1$ et $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, on obtient la relation cherchée $|\cos z|^2 = \dfrac{1}{2}\left(2\operatorname{ch}^2 y - 1 + 1 - 2\sin^2 x\right) = \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x.$

- **c)** Nous avons $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh}(x + iy) = \dfrac{e^{x+iy} - e^{-(x+iy)}}{2} = \dfrac{e^{i(y-ix)} - e^{-i(y-ix)}}{2} = i\sin(y - ix).$
  D'après la relation **a)**,
$$|\operatorname{sh} z| = |i\sin(y - ix)| = |\sin(y - ix)| = \sqrt{\operatorname{ch}^2(-x) - \cos^2 y} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y}.$$

- **d)** $\operatorname{ch} z = \operatorname{ch}(x + iy) = \dfrac{e^{x+iy} + e^{-(x+iy)}}{2} = \dfrac{e^{i(y-ix)} + e^{-i(y-ix)}}{2} = \cos(y - ix).$
  D'après la relation **b)**, $|\operatorname{ch} z| = |\cos(y - ix)| = \sqrt{\operatorname{ch}^2(-x) - \sin^2 y} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \sin^2 y}.$

==

Exercice 3 : Trouver toutes les valeurs $z = x + iy$ telles que

a) $\sin z$ soit réel, **b)** $\operatorname{sh} z$ soit imaginaire pur.

Solution. **a)** D'après l'**exerciceŁQ b)**, $\sin z = \sin x\operatorname{ch}(y) + i\cos x\operatorname{sh}(y)$.

La fonction $\sin z$ serait réelle si sa partie imaginaire s'annule. i.e. $\cos x\operatorname{sh}(y) = 0$,

ce qui est équivalent à $\cos x = 0$ ou $\operatorname{sh}(y) = 0$. D'où $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $y = 0$.

b) Tout d'abord, nous séparons les parties réelles et imaginaires de la fonction $\operatorname{sh} z$.

Nous avons $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh}(x + iy) = \operatorname{sh} x\operatorname{ch}(iy) + \operatorname{ch} x\operatorname{sh}(iy) = \operatorname{sh} x\cos y + i\operatorname{ch} x\sin y$.

La fonction $\operatorname{sh} z$ serait imaginaire pure si sa partie réelle s'annule. i.e. $\operatorname{sh} x\cos y = 0$,

d'où $x = 0$ ou $y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

==

Exercice 4 : Démontrer que $e^{(\mathrm{Log}\ z)} = z$ et montrer que

l'égalité $\mathrm{Log}(e^z) = z$ n'est pas toujours vérifiée.

Solution. Soit z un nombre complexe, nous avons

$$e^{(\mathrm{Log}\ z)} = e^{\ln(|z|)+i\arg(z)} = e^{\ln(|z|)}\left\{\cos\left(\arg\left(z\right)\right) + i\sin\left(\arg\left(z\right)\right)\right\}$$
$$= |z|\left\{\cos\left(\arg\left(z\right)\right) + i\sin\left(\arg\left(z\right)\right)\right\}.$$

La dernière formule est exactement l'écriture du nombre complexe z sous forme trigonométrique, i.e. $|z|\left\{\cos\left(\arg\left(z\right)\right) + i\sin\left(\arg\left(z\right)\right)\right\} = z$, d'où $\mathrm{Log}(e^z) = z$.

En ce qui concerne la deuxième partie de l'exercice, par exemple dans le cas de la détermination principale, si nous prenons $z = 4i\pi$, nous obtiendrons $\mathrm{Log}(e^z) = \mathrm{Log}(e^{4i\pi}) = \mathrm{Log}(1) = 0$ ce qui est différent de $4i\pi$.

==

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $\sin z = \frac{4}{3}i$, **b)** $\mathrm{sh}\, z = \frac{i}{2}$, **c)** $e^z = -2$.

Solution. **a)** D'après l'**exerciceŁQ£)Ł** $\sin z = \sin x\,\mathrm{ch}(y) + i\cos x\,\mathrm{sh}(y)$. Alors $\sin z = \dfrac{4}{3}i$ entraîne $\sin x\,\mathrm{ch}(y) = 0$ et $\cos x\,\mathrm{sh}(y) = \dfrac{4}{3}$. Puisque $\mathrm{ch}(y) \geq 1$, on aura $\sin x = 0$ ou $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant dans la deuxième équation on obtient $\cos\left(k\pi\right)\mathrm{sh}(y) = \dfrac{4}{3}$ ou $\mathrm{sh}(y) = \dfrac{4}{3\cos\left(k\pi\right)} = \dfrac{4}{3\left(-1\right)^k}$, d'où $y = \mathrm{Argsh}\left(\dfrac{4}{3\left(-1\right)^k}\right) = \left(-1\right)^k \mathrm{Argsh}\left(\dfrac{4}{3}\right)$, et donc les racines cherchés sont

$$z_k = k\pi + i\left(-1\right)^k\ \mathrm{Argsh}\left(\frac{4}{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) D'après l'**exercice 4 b)**, $\mathrm{sh}\, z = \mathrm{sh}\, x\cos y + i\,\mathrm{ch}\, x\sin y$. Donc l'équation $\mathrm{sh}\, z = \dfrac{i}{2}$ est équivalente à $\mathrm{sh}\, x\cos y = 0$ et $\mathrm{ch}\, x\sin y = \dfrac{1}{2}$.

Si $\mathrm{sh}\, x = 0$ ou $x = 0$, on aura $\sin y = \dfrac{1}{2}$ ou $\left\{y = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } y = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Si $\cos y = 0$ ou $y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on obtient $\mathrm{ch}\, x\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = \left(-1\right)^k \mathrm{ch}\, x = \dfrac{1}{2}$ ou $\mathrm{ch}\, x = \dfrac{\left(-1\right)^k}{2}$ et ceci n'est pas possible car $\mathrm{ch}\, x \geq 1$.

Alors, les racines de l'équation $\mathrm{sh}\, z = \dfrac{i}{2}$ sont $z_k = i\left(\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$ ou $z_k = i\left(\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

c) Si $e^z = e^x\cos y + ie^x\sin y = -2$, alors $e^x\cos y = -2$ et $e^x\sin y = 0$.

Puisque $e^x > 0$, on aura $\sin y = 0$ ou $y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Donc la première équation devient

$$e^x\cos\left(k\pi\right) = -2 \text{ ou } e^x = \frac{-2}{\cos\left(k\pi\right)} = \frac{-2}{\left(-1\right)^k} = 2\left(-1\right)^{k+1}.$$

Ceci est possible seulement si $k+1$ est un nombre pair. Dans ce cas $x = \ln 2$. Alors les racines de l'équation $e^z = -2$ sont $z_k = \ln 2 + i\left(1+2k\right)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

==

Exercice 6 : Calculer **a)** $\mathrm{Log}(1+i)$, **b)** i^i, **c)** $(1-i)^{3-3i}$.

Solution. a) $\mathrm{Log}(1+i) = \ln(|1+i|) + i\arg(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

b) $i^i = e^{i\,\mathrm{Log}\,i} = e^{i\,(\ln|i|+i\arg i)} = e^{i\left(\ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}, k \in \mathbb{Z}$.

c)
$$
\begin{aligned}
(1-i)^{3-3i} &= e^{(3-3i)\,\mathrm{Log}\,(1-i)} = e^{(3-3i)\,\{\ln(|1-i|)+i\arg(1-i)\}} \\
&= e^{(3-3i)\left\{\ln\sqrt{2}+i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right\}} = e^{3\ln\sqrt{2}+3\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+3i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi-\ln\sqrt{2}\right)} \\
&= 2^{\frac{3}{2}}e^{3\left(-\frac{1}{4}+2k\right)\pi}\left\{\cos\left(3\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi-\ln\sqrt{2}\right)\right)+i\sin\left(3\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi-\ln\sqrt{2}\right)\right)\right\} \\
&= 2\sqrt{2}e^{3\left(-\frac{1}{4}+2k\right)\pi}\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi+3\ln\sqrt{2}\right)-i\sin\left(\frac{3}{4}\pi+3\ln\sqrt{2}\right)\right\}, k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

==

Exercice 7 : Calculer les limites suivantes :

$$\textbf{a)}\ \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\mathrm{ch}\,(iz)+i\ \mathrm{sh}\,(iz)},\ \textbf{b)}\ \lim_{z\to -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z}+1}{e^z+i}.$$

Solution. a) $\displaystyle\lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\mathrm{ch}\,(iz)+i\ \mathrm{sh}\,(iz)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{ch}\left(i\frac{\pi}{4}\right)+i\ \mathrm{sh}\left(i\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{0}{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{0}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{0}{0}$ forme indéterminée.

Donc on doit trouver un moyen pour enlever l'indétermination, pour cela on va remplacer $\mathrm{ch}(iz)$ par $\cos z$ et $i\ \mathrm{sh}(iz)$ par $-\sin z$. On obtient

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\mathrm{ch}\,(iz)+i\ \mathrm{sh}\,(iz)} &= \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\cos z-\sin z} = \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 z-\sin^2 z}{\cos z-\sin z} \\
&= \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos z-\sin z)(\cos z+\sin z)}{\cos z-\sin z} = \cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

b) $\displaystyle\lim_{z\to -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z}+1}{e^z+i} = \frac{e^{-i\pi}+1}{e^{-i\frac{\pi}{2}}+i} = \frac{-1+1}{-i+i} = \frac{0}{0}$ forme indéterminée.

Par décomposition de numérateur $e^{2z}+1 = (e^z)^2 - i^2 = (e^z-i)(e^z+i)$ nous voyons que

$$\lim_{z\to -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z}+1}{e^z+i} = \lim_{z\to -i\frac{\pi}{2}} \frac{(e^z-i)(e^z+i)}{e^z+i} = e^{-i\frac{\pi}{2}} - i = -2i.$$

==

Exercice 8 : Montrer que $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z}$ n'existe pas.

Solution. Si la limite existait elle serait indépendante de la façon dont z tend vers 0.

Si $z\to 0$ le long de l'axe des x, alors $y=0$ et $z = x+iy = x$, $\overline{z} = x-iy = x$; la limite cherchée est donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$.

Si $z\to 0$ le long de l'axe des y, alors $x=0$ et $z = x+iy = iy$, $\overline{z} = x-iy = -iy$; la limite cherchée est $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{-iy}{iy} = -1$.

Les deux expressions étant différentes, dépendant de la façon dont $z\to 0$, il n'y a pas de limite.

==