U.S.T.H.B. 2013-2014 Semestre 2 | **Math 4 : Analyse complexe**
Faculté de Mathématiques | **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section D**

Série d'exercices n° 3 : Intégration dans $\mathbb{C}$ - Théorème de Cauchy

==

Exercice 1 :

Calculer $\displaystyle\int_{(0,3)}^{(2,4)} (2y + x^2)\,dx + (3x - y)\,dy$ le long de

a) la parabole $x = 2t$, $y = t^2 + 3$,

b) la ligne brisée formée par les segments de droite $(0,3)$ à $(2,3)$ et $(2,3)$ à $(2,4)$,

c) le segment de droite d'extrémités $(0,3)$ et $(2,4)$.

Solution. **a)** Les points $(0,3)$ et $(2,4)$ de la parabole correspondent respectivement à $t = 0$ et $t = 1$. L'intégrale donnée a alors pour valeur

$$\int_{t=0}^{1} \left\{2\left(t^2+3\right) + (2t)^2\right\} 2dt + \left\{3\,(2t) - \left(t^2+3\right)\right\} 2tdt = \int_0^1 \left(24t^2 + 12 - 2t^3 - 6t\right) dt = \frac{33}{2}.$$

b) Le long du segment de droite d'extrémités $(0,3)$ et $(2,3)$, $y = 3$, $dy = 0$ et l'intégrale curviligne vaut

$$\int_{x=0}^{2} \left(6 + x^2\right) dx + (3x - 3)\,0 = \int_0^2 \left(6 + x^2\right) dx = \frac{44}{3}.$$

Le long du segment de droite d'extrémités $(2,3)$ et $(2,4)$, $x = 2$, $dx = 0$ et l'intégrale curviligne vaut

$$\int_{y=3}^{4} (2y + 4)\,0 + (6 - y)\,dy = \int_3^4 (6 - y)\,dy = \frac{5}{2}.$$

Le résultat demandé est donc $= \dfrac{44}{3} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{103}{6}$.

c) Une équation de la droite joignant $(0,3)$ à $(2,4)$ est $2y - x = 6$. On en tire $x = 2y - 6$. D'où la valeur de l'intégrale curviligne

$$\int_{y=3}^{4} \left\{2y + (2y-6)^2\right\} 2dy + \left\{3\,(2y-6) - y\right\} dy = \int_3^4 \left(8y^2 - 39y + 54\right) dy = \frac{97}{6}$$

Ce résultat peut aussi être obtenu en utilisant $y = \dfrac{1}{2}(x+6)$.

==

Exercice 2 :

Évaluer $\displaystyle\int_C \overline{z}dz$ de $z = 0$ à $z = 4 + 2i$ le long de la courbe C dans les cas suivants.

a) la courbe C définie par $z = t^2 + it$,

b) la courbe C formée des segments joignant 0 à $2i$ et $2i$ à $4 + 2i$.

Solution. a) Les points $z = 0$ et $z = 4 + 2i$ sur C correspondant à $t = 0$ et à $t = 2$. L'intégrale curviligne considérée vaut donc

$$\int_{t=0}^{2} \overline{(t^2 + it)} d\left(t^2 + it\right) = \int_0^2 \left(t^2 - it\right)(2t + i)\, dt = \int_0^2 \left(2t^3 - it^2 + t\right) dt = 10 - \frac{8}{3}i.$$

Autre méthode. L'intégrale donnée s'écrit

$$\int_C (x - iy)(dx + idy) = \int_C xdx + ydy + i\int_C xdy - ydx$$

Les équations paramétriques de C sont $x = t^2$, $y = t$ de $t = 0$ à $t = 2$; l'intégrale curviligne a donc pour valeur

$$\int_{t=0}^{2} \left(t^2\right)(2tdt) + (t)(dt) + i\int_{t=0}^{2} \left(t^2\right)(dt) - (t)(2tdt) = \int_0^2 \left(2t^3 + t\right) dt + i\int_0^2 \left(-t^2\right) dt = 10 - \frac{8}{3}i.$$

b) L'intégrale donnée vaut

$$\int_C (x - iy)(dx + idy) = \int_C xdx + ydy + i\int_C xdy - ydx$$

La droite qui joint 0 à $2i$ joint les points $(0, 0)$ et $(0, 2)$, on a donc sur cette droite $x = 0$, $dx = 0$ et la valeur de l'intégrale est

$$\int_{y=0}^{2} (0)(0) + ydy + i\int_{y=0}^{2} (0)(dy) - y(0) = \int_{y=0}^{2} ydy = 2.$$

Sur le segment de droite $2i$, $4 + 2i$ on a $y = 2$, $dy = 0$, d'où

$$\int_{x=0}^{4} xdx + (2)(0) + i\int_{x=0}^{4} (x)(0) - 2dx = \int_0^4 xdx + i\int_0^4 (-2)\, dx = 8 - 8i.$$

Et le résultat demandé est $= 2 + (8 - 8i) = 10 - 8i$.

==

Exercice 3 :

Évaluer les intégrales $\oint_C dz$, $\oint_C zdz$ et $\oint_C z - idz$,

où C est une courbe fermée simple.

Solution. Ce sont des conséquences du théorème de Cauchy car les fonctions 1, z et $z - i$ sont holomorphes dans C et ont des dérivées continues.

Ces résultats peuvent aussi être établis directement à partir de la définition de l'intégrale.

==

==

Exercice 4 :

Évaluer $\oint_C \frac{1}{z-a}dz$ où C désigne une courbe fermée et $z=a$ est

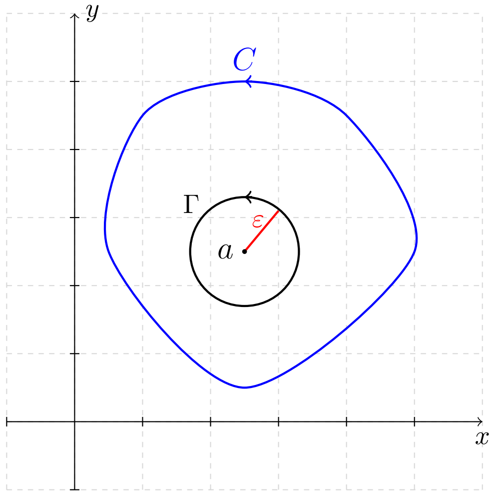
a) à l'extérieur de C, **b)** à l'intérieur de C.

Solution. **a)** Si a est à l'extérieur de C, alors $f(z) = \frac{1}{z-a}$ est holomorphe à l'intérieur de C et sur C.

Alors d'après le théorème de Cauchy $\oint\limits_C \frac{1}{z-a}dz = 0$.

b)

Supposons a intérieur à C et soit Γ un cercle de rayon ε, centré en $z=a$, tel que Γ soit à l'intérieur de C [ceci peut être réalisé car $z=a$ est un point intérieur].



D'après une conséquence du théorème de Cauchy

$$\oint\limits_C \frac{1}{z-a}dz = \oint\limits_\Gamma \frac{1}{z-a}dz. \tag{1}$$

D'autre part sur Γ, $|z-a| = \varepsilon$ ou $z-a = \varepsilon e^{i\theta}$, i.e. $z = a+\varepsilon e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. D'où tenant compte de $dz = i\varepsilon e^{i\theta}d\theta$, le deuxième membre de (1) devient

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta}d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i,$$

qui est le résultat cherché.

==