U.S.T.H.B. 2013-2014 Semestre 2 **Math 4 : Analyse complexe**
Faculté de Mathématiques **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section D**

Série d'exercices N° 4 : Formules intégrales de Cauchy

==

Exercice 1 :

Évaluer

a) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz,$

b) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$ où C est le cercle $|z| = 3$.

Solution. a) De $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$, on tire

$$\oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz = \oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2} dz - \oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-1} dz$$

L'application de la formule de Cauchy pour $a = 2$ et $a = 1$ donne

$$\oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2} dz = 2\pi i \left\{\sin\left(\pi 2^2\right) + \cos\left(\pi 2^2\right)\right\} = 2\pi i,$$

$$\oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-1} dz = 2\pi i \left\{\sin\left(\pi 1^2\right) + \cos\left(\pi 1^2\right)\right\} = -2\pi i,$$

car $z = 1$ et $z = 2$ sont à l'intérieur de C et $\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)$ est holomorphe dans C. L'intégrale considérée vaut donc $2\pi i - (-2\pi i) = 4\pi i$.

b) Soit $f(z) = e^{2z}$ et $a = -1$, la formule intégrale de Cauchy s'écrit

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz. \tag{1}$$

Si $n = 3$, alors $f'''(z) = 8e^{2z}$ et $f'''(-1) = 8e^{-2}$. Dans ces conditions la formule (1) devient

$$8e^{-2} = \frac{3!}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{2z}}{(z-a)^4} dz,$$

d'où l'on tire la valeur de l'intégrale considérée $\dfrac{8}{3}\pi i e^{-2}$.

==

Exercice 2 :

Soit f une fonction holomorphe dans un cercle C de rayon r, centré en a, et sur C. Démontrer le théorème de Gauss sur la valeur moyenne : la moyenne des valeurs de $f(z)$ sur C est $f(a)$, i.e.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\theta}\right) d\theta.$$

Solution. D'après la formule intégrale de Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz. \tag{2}$$

Si C a pour rayon r, l'équation de C est $|z-a| = r$ ou $z = a + re^{i\theta}$. Donc (2) devient

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f\left(a+re^{i\theta}\right)}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a+re^{i\theta}\right)d\theta,$$

qui est le résultat demandé.

==

Exercice 3 :

En utilisant la formule intégrale de Cauchy, montrer que

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\theta d\theta = \frac{3}{4}\pi.$$

Indication : Poser $z = e^{i\theta}$, C le cercle unité $|z| = 1$, d'où $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ et $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

Solution. On pose $z = e^{i\theta}$. D'où $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$ ou $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ et $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

On a donc, si C désigne le cercle unité $|z| = 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos^4\theta d\theta &= \oint_C \left\{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}^4 \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2^4 i}\oint_C \frac{1}{z}\left(z^4 + 4z^3\frac{1}{z} + 6z^2\frac{1}{z^2} + 4z\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4}\right)dz \\ &= \frac{1}{16i}\oint_C \frac{1}{z}\left(z^4 + 4z^2 + 6 + \frac{4}{z^2} + \frac{1}{z^4}\right)dz = \frac{1}{16i}\oint_C \left(z^3 + 4z + \frac{6}{z} + \frac{4}{z^3} + \frac{1}{z^5}\right)dz \\ &= \frac{1}{16i}\oint_C \left(z^3+4z\right)dz + \frac{3}{8i}\oint_C \frac{1}{z}dz + \frac{1}{4i}\oint_C \frac{1}{z^3}dz + \frac{1}{16i}\oint_C \frac{1}{z^5}dz.\end{aligned}$$

La fonction $z^3 + 4z$ est holomorphe dans C, donc d'après le théorème de Cauchy $\oint_C \left(z^3+4z\right)dz = 0$.

Pour $f(z) = 1$ et $a = 0$, la formule intégrale de Cauchy s'écrit $f^{(n)}(0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{1}{z^{n+1}}dz$.

Si $n = 0,\ 2,\ 4$, on obtient

$$\oint_C \frac{1}{z}dz = 2\pi i, \quad \oint_C \frac{1}{z^3}dz = 0, \quad \oint_C \frac{1}{z^5}dz = 0.$$

D'où $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^4\theta d\theta = \frac{3}{8i}(2\pi i) = \frac{3}{4}\pi.$

==