

Série d'exercices n° 5 : Séries infinies, séries de Taylor, séries de Laurent

Exercice 1 :

Déterminer le domaine de convergence des séries

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$.

Solution. a) Si $u_n = \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$, alors $u_{n+1} = \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. D'où si l'on ne tient pas compte de la valeur $z = 0$, valeur pour laquelle la série converge, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{z^2 (2n-1)!}{(2n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^2 (2n-1)!}{(2n-1)! (2n+1) (2n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^2}{(2n+1) (2n)} = 0 < 1.$$

pour tout z fini. La série converge donc quel que soit z , ce que l'on traduit en disant la série converge pour $|z| < \infty$. De façon équivalente on peut dire que le cercle de convergence est infini ou que le rayon de convergence $R = \infty$.

b) Si $u_n = n! z^n$, $u_{n+1} = (n+1)! z^{n+1}$. En excluant $z = 0$ valeur pour laquelle la série donnée converge, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! z^{n+1}}{n! z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |z| = \infty.$$

La série converge donc seulement pour $z = 0$.

Exercice 2 :

Soit $f(z) = \text{Log}(1+z)$, où l'on considère la branche qui prend la valeur zéro pour $z = 0$.

- a) Développer $f(z)$ en série de Taylor au voisinage de $z = 0$.
- b) Déterminer le domaine de convergence de la série de (a).

Solution. a) On a

$$f(z) = \text{Log}(1+z) \quad f(0) = 0, \quad f'(z) = \frac{1}{1+z} = (1+z)^{-1} \quad f'(0) = 1,$$

$$f''(z) = -(1+z)^{-2} \quad f''(0) = -1, \quad f'''(z) = -(-2)(1+z)^{-3} \quad f'''(0) = 2!,$$

...

$$f^{(n+1)}(z) = (-1)^n n! (1+z)^{-(n+1)} \quad f^{(n+1)}(0) = (-1)^n n!$$

Alors

$$\begin{aligned} f(z) = \text{Log}(1+z) &= f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \dots \\ &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

Autre méthode. Si $|z| < 1$, $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$. On obtient alors par intégration entre 0 et z

$$\text{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

b) Le n -ième terme est $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n = a_n z^n$. D'après le critère de d'Alembert

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{n+1}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

et la série converge pour $|z| < 1$.

On peut montrer que la série converge pour $|z| = 1$ sauf pour $z = -1$.

Ce résultat est aussi une conséquence du fait que la série converge dans un cercle qui s'étend jusqu'à la singularité la plus proche (i.e. $z = -1$) de $(f(z))$.

Exercice 3 : Déterminer le développement en série de Laurent des fonctions suivantes au voisinage des singularités indiquées.

a) $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$; $z = 1$.

b) $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$; $z = -2$.

Solution. a) Soit $z - 1 = u$. Alors $z = 1 + u$ et

$$\begin{aligned} \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} &= \frac{e^{2+2u}}{u^3} = \frac{e^2}{u^3} \cdot e^{2u} = \frac{e^2}{u^3} \left\{ 1 + 2u + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^3}{3!} + \frac{(2u)^4}{4!} + \dots \right\} \\ &= \frac{e^2}{u^3} + \frac{2e^2}{u^2} + \frac{2e^2}{u} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2^4}{4!}e^2u + \dots \\ &= \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2}{3}e^2(z-1) + \dots \end{aligned}$$

Le point $z = 1$ est un pôle d'ordre trois, ou pôle triple. La série converge pour toute valeur de $z \neq 1$.

b) Soit $z + 2 = u$. D'où

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z+1)(z+2)} &= \frac{u-2}{(u-1)u} = \frac{2-u}{u} \cdot \frac{1}{1-u} = \frac{2-u}{u} (1 + u + u^2 + u^3 + \dots) \\ &= \left(\frac{2}{u} + 2 + 2u + 2u^2 + \dots \right) - (1 + u + u^2 + u^3 + \dots) \\ &= \frac{2}{u} + 1 + u + u^2 + \dots = \frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \dots \end{aligned}$$

Le point $z = -2$ est un pôle simple. La série converge pour toute valeur de z telle que $0 < |z + 2| < 1$.