U.S.T.H.B. 2013-2014 Semestre 2 — **Math 4 : Analyse complexe**

Faculté de Mathématiques — **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section D**

Série d'exercices n° 6 : Théorème des résidus

Exercice 1 :

Trouver les résidus de **(a)** $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z^2+4)}$ et **(b)** $f(z) = \dfrac{e^z}{\sin^2 z}$ en tous les pôles à distance finie.

Exercice 2 :

Calculer $\dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \dfrac{e^z}{z^2 (z^2 + 2z + 2)} dz$ le long du cercle C d'équation **(a)** $|z| = 3$ et **(b)** $|z| = 1$.

Exercice 3 :

Evaluer **(a)** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^6+1} dx$ et **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2 (x^2+2x+2)} dx$.

Exercice 4 :

Evaluer **(a)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} d\theta$ et **(b)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin\theta} d\theta$.

Exercice 5 :

Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(mx)}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}, \ m > 0$.

Exercice 6 :

Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 7 :

Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}, \quad 0 < p < 1$.

Exercice 8 :

Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(ax)}{\operatorname{ch} x} dx = \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}, \quad$ où $|a| < 1$.

Exercice 9 :

Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log}(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \operatorname{Log} 2$.