$2^{ème}$ ST Section C

Math 4 - Analyse complexe.

Année 2011-2012 Semestre 2

Enseignant : LAADJ Toufik (TD G2, G5)

Email : laadjt@gmail.com

Horaire : Mardi ~~9h40 - 11h10~~ 11h20 - 12h50 Amphi K

Lien à ce livre en www.facebook.com/USTHB2LicSTcomplexAnalysis ← Livre : • Serie schaum : Variables complexes : cours et problèmes Murray R. Spiegel 1976.

Objectif du cours :

Maîtriser les concepts et les résultats fondamentaux de variable complexe de manière à pouvoir les utiliser dans d'autres cours.

Contenu du cours :

- Les nombres complexes.
- Fonctions complexes.
- Derivation complexes, equations de Cauchy Riemann.
- Integration complexe, theoreme de Cauchy.
- Series infinies, Taylor, Laurent.
- Théorème des Résidus. calcule d'integrales par la méthode des résidus.

Chapitre 1

1. Nombres complexes:

1.1 L'ensemble des nombres complexes:

- Question : Trouver un nombre réel solution de l'équation $x^2+1=0$
- Réponse : Il n'exist pas de nombre réel x qui soit solution de $x^2+1=0 \rightarrow x^2=-1$
- Pour donner les solutions à cette équation, on introduit les nombres complexes

  on pose $i^2=-1$, $i=\sqrt{-1}$, on appelle i l'unité imaginaire

Définition 1.1

Un nombre complexe s'écrit sous la forme $z=a+bi$ (forme algébrique)

a et b sont des nombres réels

Le nombre 'a' est appellé la partie réelle de z. $a=Re(z)$

Le nombre 'b' est appellé la partie imaginaire de z. $b=Im(z)$

L'ensemble des nombres complexes noté par $\mathbb{C}$

Définition 1.2

Deux nombres complexes z et w sont égaux si et seulement si

$$Re(z)=Re(w) \text{ et } Im(z)=Im(w)$$

Opérations sur les nombres complexes:

Soient $z=x+iy$ et $w=u+iv$

- Addition $z+w=(x+u)+i(y+v)$
- Soustraction $z-w=(x-u)+i(y-v)$
- Multiplication: $zw=(x+iy)(u+iv)=xu+xvi+yui+i^2yv$

$$=(xu-yv)+(xv+yu)i$$

- Division : $\frac{z}{w}=\frac{x+iy}{u+iv}=\frac{x+iy}{u+iv}\cdot\frac{u-iv}{u-iv}=\frac{xu+yv}{u^2+v^2}+\frac{yu-xv}{u^2+v^2}i$

Définition 1.3 :

Soit $z=x+iy$. La valeur absolue ou module du nombre complexe z

est définie par $|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}$.

- Le conjugue du nombre complexe z est $\overline{z}=x-iy$

Remarque : (i) $\sqrt{x^2} = |x|$ si $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 = |x|^2$

(ii) $|z|^2 \neq z^2$ si $Im(z) \neq 0$

Exercice : Montrer que a) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

b) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

Lemme 1.1 Soient $z, w \in \mathbb{C}$

(i) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ (iii) $\bar{\bar{z}} = z$

(ii) $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$ (4i) $z\bar{z} = |z|^2$

Preuve : Exercice

Lemme 1.2 : $z, w \in \mathbb{C}$

(i) $|zw| = |z||w|$ (ii) $|\bar{z}| = |z|$

(iii) $z + \bar{z} = 2\,\mathcal{R}(z)$ (4i) $z - \bar{z} = 2\,Im(z)\,i$

(5i) $|z + w| \leq |z| + |w|$ inégalité triangulaire

Preuve Exercice !

Remarque : Si $z, w \in \mathbb{C}$ $w \neq 0$, alors

(i) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\,\bar{w}}{w\,\bar{w}} = \dfrac{z\,\bar{w}}{|w|^2}$

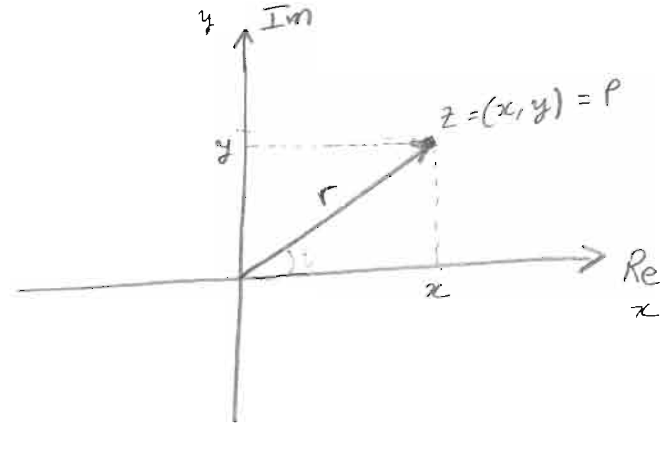
(ii) $|z - w| \geq \big||z| - |w|\big|$ inégalité triangulaire inverse.

Exemple :

$$\frac{2+3i}{1-2i} = \frac{2+3i}{1-2i}\,\frac{1+2i}{1+2i} = \frac{-4}{5} + \frac{7}{5}i$$

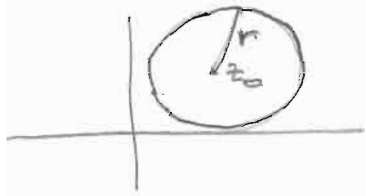
1.2 Plan complexe :

- P désigne un point du plan complexe correspondant à un nombre complexe (x, y) ou $x + iy$



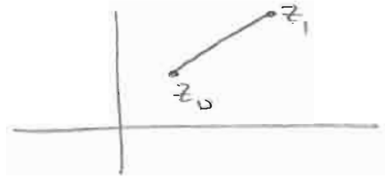
Courbes dans le plan complexe :

Circle : $|z - z_0| = r$

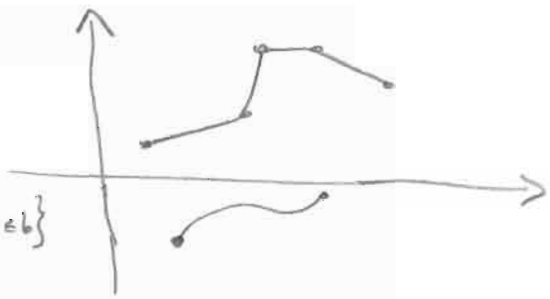


Segment

$$\{ z \,/\, z = (1-t)\, z_0 + t\, z_1 \,,\ t \in [0,1] \}$$



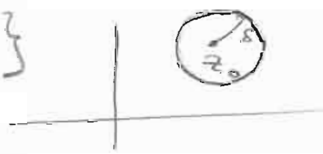
Ligne segment par moreaux



Courbe linear $\left\{ \begin{array}{l} z = x + i\, f(x) \\ \quad = (x, f(x)) \end{array} \quad a \le x \le b \right\}$

Topologie de $\mathbb{C}$:

. Ouvert δ- voisinage de z_0 : $V_\delta(z_0) = \{ z \,/\, |z - z_0| < \delta \}$



. Fermé δ- voisinage de z_0 : $\overline{V}_\delta(z_0) = \{ z \,/\, |z - z_0| \le \delta \}$

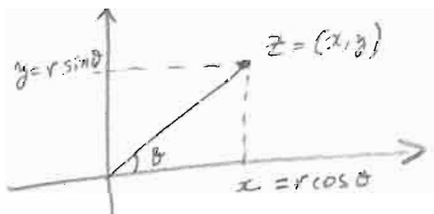
- Un ensemble S dans $\mathbb{C}$ est connexe, si pour tous 2 points de S peuvent être liés par une courbe linear par morceaux contenant dans S.

- Un ensemble S de $\mathbb{C}$ est borné, s'il exist $M > 0$ tel que $|z| \le M$ pour tout z dans S.

- Un ensemble S de $\mathbb{C}$ est compact s'il est borné et fermé.

Forme polaire des nombres complexes :

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$



. $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$: module de z

. θ : l'amplitude ou l'argument de z $(\arg(z))$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } -\pi < \theta < \pi, \text{ alors} \\ \theta \text{ est l'argument principale. (noté par Arg)} \end{array} \right.$

Formule de de Moivre

si $z_1 = x_1 + i y_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$

$z_2 = x_2 + i y_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$,

alors $z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i \sin(\theta_1+\theta_2) \right)$.

i.e. $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

Une généralisation :

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 r_3 \cdots r_n \left(\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots\theta_n) + i \sin(\theta_1+\theta_2+\cdots\theta_n) \right)$$

ce qui conduit à $z^n = r^n \left(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \right)$ $\quad n \in \mathbb{N}$

et $z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos(\frac{\theta}{n}) + i \sin(\frac{\theta}{n}) \right)$ $\quad n \in \mathbb{N}$.

Remarque :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i \sin(\theta_1-\theta_2) \right)$$

• Racine $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe :

si $z = w^n \to w = z^{\frac{1}{n}}$

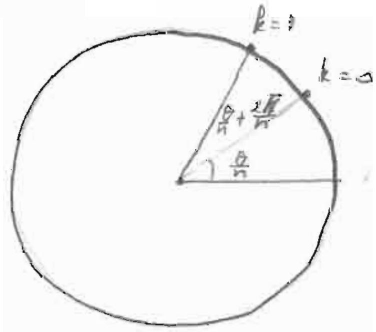
$z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$

$w = s(\cos\varphi + i \sin\varphi) \to w^n = s^n \left(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) \right)$.

Alors : $r = s^n$ et $n\varphi = \theta + 2k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

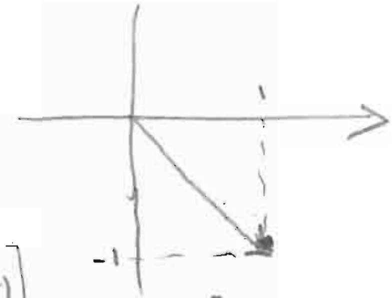
$\to s = r^{\frac{1}{n}}$ et $\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

$$\to z^{\frac{1}{n}} = \left\{ r^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right], k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



Exemple :

Calculer $\sqrt[3]{1-i}$



$$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$$

$$z^{\frac{1}{3}} = \left\{ (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} \left[\cos\left(\frac{-\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right],\ k = 0, 1, 2 \right\}$$

$$\rightarrow w_0 = 2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i\ \sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right]$$

$$w_1 = 2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\ \sin\left(\frac{-\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$w_2 = 2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\ \sin\left(\frac{-\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

Example :

$n^{\text{ème}}$ racine de 1 :

$$w^n = 1 = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi).$$

$$\rightarrow w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Chapitre 2 :

2. Fonctions complexes :

Définition : Soient A et B deux ensembles non-vides dans $\mathbb{C}$

Si à chaque valeur $z \in A$, il correspond une ou plusieurs valeurs w dans B, nous dirons que w est une fonction de z

$$f : A \longrightarrow B$$
$$z \longmapsto w = f(z)$$

- z appelée la variable independent
- w appelée la variable dependent

Example : $f(z) = z^2$

Définition :

- Si une seule valeur de w correspond à chaque valeur de z, nous dirons que w ou $f(z)$ est une fonction uniforme de z.

- Si plusieurs valeurs de w correspondent à chaque valeur de z, nous dirons que w ou $f(z)$ une fonction multiforme de z.

- une fonction multiforme est un ensemble de fonctions uniformes, chaque élément est appelé une branche de la fonction.

- On choisit un élément comme branche principale ou détermination principale.

Example 1 : $f(z) = z^2$ est une fonction uniforme de z

Example 2 : $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ est une fonction multiforme de z

- Si $w = f(z)$, on peut considérer z comme fonction de w, on écrit $z = f^{-1}(w)$. f^{-1} : fonction inverse de f.

- Si $z = x + iy$, la fonction $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$$u = Re(f) \quad , \quad v = Im(f) .$$

Exemple : $f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3yx^2 - y^3)$

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 \quad , \quad v(x,y) = 3yx^2 - y^3 .$$

2.1 Les fonctions élémentaires :

- les fonctions polynômials.

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \equiv P(z) .$$

$$a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{C} \quad , \quad n \in \mathbb{N} .$$

- Les fonctions rationnelles.

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad , \quad P, Q \text{ sont des pôlynômes.}$$

Example : $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ où $ad - bc \neq 0$ est appelée transformation homographique.

- Les fonctions exponentielles.

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x(\cos(y) + i \sin(y))$$

- Les fonctions trigonométriques.

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sec(z) = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \qquad \operatorname{cosec}(z) = \frac{1}{\sin(z)} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

$$tg(z) = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

La plupart des properiétés des fonctions trigonométriques réelles sont encore valables dans le cas complexe.

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad , \quad 1 + tg^2 z = \sec^2 z \quad , \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 z = \operatorname{cosec}^2 z$$

$$\sin(-z) = -\sin(z) \quad , \quad \cos(z) = \cos(-z) \quad , \quad tg(-z) = -tg(z)$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

$$\vdots$$

- **Les fonctions hyperboliques**

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \frac{2}{e^{z} + e^{-z}} \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{sh} z} = \frac{2}{e^{z} - e^{-z}}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}} \qquad \operatorname{coth} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^{z} + e^{-z}}{e^{z} - e^{-z}}$$

Les properiéties suivantes sont vérifiées.

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1 \qquad 1 - \operatorname{th}^2 z = \operatorname{secch}^2 z \qquad \operatorname{coth}^2 z - 1 = \operatorname{csch}^2 z$$

$$\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z \qquad \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z \qquad \operatorname{th}(-z) = -\operatorname{th}(z)$$

$$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$$

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 - \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2 .$$

$$\operatorname{th}(z_1 + z_2) = \frac{\operatorname{th} z_1 + \operatorname{th} z_2}{1 + \operatorname{th} z_1 \operatorname{th} z_2}$$

Les fonctions trigonométriques (ou circulaires) et les fonctions hyperboliques sont liées par les relations:

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z \qquad \cos(iz) = \operatorname{ch} z \qquad \operatorname{tg}(iz) = i \operatorname{th} z$$

$$\operatorname{sh}(iz) = i \sin z \qquad \operatorname{ch}(iz) = \cos z \qquad \operatorname{th}(iz) = i \operatorname{tg} z$$

- **Fonctions logarithmiques.**

La fonction $\operatorname{Log} z$ est définie comme l'inverse de e^{z}

$$w = \operatorname{Log} z \iff z = e^{w} .$$

Théorème:

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}|z| + i\left(\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi\right) \qquad k \in \mathbb{Z}, \; z \neq 0 .$$

Preuve: $z = x + iy$, $w = u + iv$

$$z = e^{w} \iff x + iy = e^{u+iv} = e^{u}(\cos v + i \sin v)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z| = e^{u} \\ v = \arg z = \operatorname{Arg}(z) + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Log} z = w = u + iv = \operatorname{Log}|z| + i \underbrace{\left(\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi\right)}_{\arg(z)} \qquad k \in \mathbb{Z} .$$

Remarque: 1) $\operatorname{Log} z$ est une fonction multiforme.

Remarque 2 : La détermination principale ou valeur principale de Log z (branche principale) est définie par

$$\mathrm{Log}\, z = \mathrm{Log}|z| + i\, \mathrm{Arg}(z).$$

$$-\pi \leq \mathrm{Arg}(z) < \pi$$

Example :

$$\mathrm{Log}(-1) = \mathrm{Log}|-1| + i \arg(z) = i(\pi + 2k\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

La détermination principale est $\mathrm{Log}(-1) = i\pi$

Les propriétés suivantes sont vérifiées dans $\mathbb{C}$

- $\mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2 \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $\mathrm{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Log}\, z_1 - \mathrm{Log}\, z_2 \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $\mathrm{Log}\, z^n = n\, \mathrm{Log}\, z \qquad z \in \mathbb{C}.$

- Les fonctions z^α et a^z. z^α et a^z sont définis par

$$z^\alpha = e^{\alpha \mathrm{Log}\, z}, \quad a^z = e^{z \mathrm{Log}\, a}$$

Example : $i^{-i} = e^{-i \mathrm{Log}\, i} = e^{-i\left(0 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)} = e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \qquad k \in \mathbb{Z}$

La valeur principale est $i^{-i} = e^{\frac{\pi}{2}}$.

Remarque : • $(z^\alpha)^k = z^{\alpha k} \qquad \alpha \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}$

• $(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\beta}$ dans le cas général $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}$.

Example : $(i^2)^i = (-1)^i = e^{i(i\pi + i2k\pi)} = e^{-(\pi + 2k\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$

mais $i^{2i} = e^{2i\left(i\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = e^{-(\pi + 4k\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}.$

- Fonctions trigonométriques inverses.

$$\arcsin(z) = \frac{1}{i} \mathrm{Log}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \qquad \arccos(z) = \frac{1}{i} \mathrm{Log}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$\mathrm{arctg}(z) = \frac{1}{2i} \mathrm{Log}\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right) \qquad \mathrm{arccotg}(z) = \frac{1}{2i} \mathrm{Log}\left(\frac{z + i}{z - i}\right)$$

- Fonctions hyperboliques inverses :

$$\operatorname{argsh}(z) = \operatorname{Log}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right) \qquad \operatorname{argch}(z) = \operatorname{Log}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$$

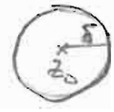
$$\operatorname{argth}(z) = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \qquad \operatorname{argcoth}(z) = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

2.2 Limites :

Définition (voisinages)

. Un delta, ou δ, voisinage d'un point z_0 est l'ensemble $\{z\in\mathbb{C} \,/\, |z-z_0|<\delta\}$, $\delta>0$

. Un δ voisinage pointé de z_0 est un voisinage dans lequel le point z_0 est omis. ie $0<|z-z_0|<\delta$.

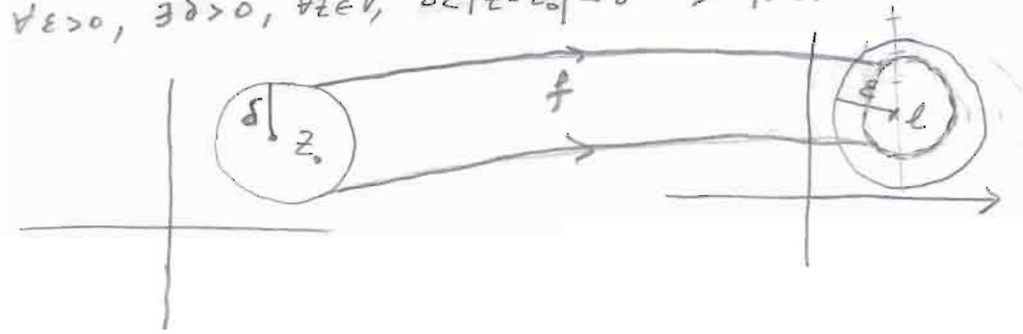


Soit $f(z)$ une fonction uniforme définie dans un voisinage V de z_0 sauf peut-être en $z=z_0$ (ie δ voisinage pointé de z_0)

on dit que $l\in\mathbb{C}$ est la limite de $f(z)$ quand z tend vers z_0

et on écrit $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = l$ si

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall z\in V,\ 0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-l|<\varepsilon$$



Remarque : Quand la limite d'une fonction existe, elle est unique.

si $f(z)$ est multiforme la limite peut dependre de la branche choisie

Continuité : Soit $f(z)$ une fonction uniforme defini dans V un voisinge de z_0 et définie en z_0.

La fonction $f(z)$ est dite continue en z_0 si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

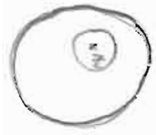
Example : $f(z) = \begin{cases} z^2 & z\neq i \\ 0 & z=i \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{z\to i} f(z) = -1 \neq f(i)=0$

la fonction $f(z)$ n'est pas continue en i.

Remarque : $f=u+iv$ continue en $z_0=x_0+iy_0$ ssi u et v sont continues en (x_0,y_0).

3. Dérivation dans $\mathbb{C}$:

Définition : On dit que $A \subset \mathbb{C}$ est un ouvert (ou ensemble ouvert), si pour tout $z \in A$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\{w \in \mathbb{C} ; |w - z| \leq \varepsilon\} \subset A$



Définition de la dérivée :

Soit $A \subset \mathbb{C}$ un ouvert dans $\mathbb{C}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in A$

La dérivée de la fonction f en z_0 est

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \stackrel{\text{ou}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

pourvu que cette limite existe.

- Si la limite existe, on dit que f est dérivable en z_0.

Définition (fonction holomorphe) (dans le livre holomorphe $\equiv$ analytique).

- On dit que f est une fonction <u>holomorphe</u> dans un ouvert A, si f est dérivable en tout point z de A.

- Une fonction est dite holomorphe en un point z_0 si elle est holomorphe dans un voisinage $\{|z - z_0| < \delta\}$, $\delta > 0$

- Une fonction f est dite entière si elle dérivable sur tout le plan complexe.

Exemple : 1) Les polynômes sont des fonctions entières

2) La fonction $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3) La fonction $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ n'est pas dérivable en aucun point.

Équations de Cauchy-Riemann :

Soit $A \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans A. Alors $f = u + iv$

les parties réelles et imaginaires u et v admettent en tout point de A des dérivées partielles qui satisfont les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \; ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Réciproquement si les dérivées partielles de u et v sont continues et satisfont les équations de Cauchy-Riemann, alors la fonction $f = u + iv$ est holomorphe dans A.

Lemme : si f est holomorphe dans A, alors

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \forall z \in A$$

Example: $f(z) = z^2$, $f'(z) = 2z$. f est entière

$$f(z) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -2y \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i\,2y$$

Fonctions harmoniques : (dans $\mathbb{R}^2$)

Définition :
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ désigne l'opérateur de Laplace sur $\mathbb{R}^2$

- Une fonction u sur Ω est dite harmonique si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et son Laplacien est nul $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0$ sur Ω.

Les équations de Cauchy-Riemann et fonctions harmoniques :

Si les dérivées partielles secondes de u et v par rapport à x et y existent et sont continues dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, alors on peut tirer des équations de C-R

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

i.e. Les parties réelles et imaginaires de $f = u + iv$ sont des fonctions harmoniques.

Preuve:

Les équations de C-R:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-\partial^2 v}{\partial y \partial x}\end{array}\right. \xrightarrow{\text{somme}} \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$$

Par les mêmes étapes on obtient $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

Exemple:

$$f(z) = z^2 = (z+iy)^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy$$

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0.$$

- Si u est une fonction harmonique sur un ouvert Ω. Alors une fonction v dite harmonique conjuguée de u si u et v vérifient les conditions de Cauchy Riemann

---

Règles de Dérivation:

- Les règles du calcul différentiel concernant sommes, différences, produits, quotients et compositions (Lorsqu'elles sont définies) sont encore valable.
- Une fonction dérivable est nécessairement continue.

Dérivées des fonctions élémentaires:

Les dérivées des fonctions élémentaires dans le cas complexe sont identiques à celles dans le cas réel.

Exemple: $\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$, $\frac{d}{dz} a^z = a^z \operatorname{Log} a$, ...

Dérivées d'ordre supérieur:

Si f est holomorphe dans un ouvert A, sa dérivée notée f'. Si f' est holomorphe dans A. Sa dérivée est notée f''. De la même façon on définit les dérivées supérieures.

<u>Théorème</u>: Si f est holomorphe dans un ouvert <u>connexe</u> A, alors f', f'', ... sont également holomorphe dans A. i.e. les dérivées tous ordres existent dans A.

Règle de L'hospital :

Soit f et g deux fonctions holomorphe dans un ouvert connexe contenant z_0 supposons que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ avec $g'(z_0) \neq 0$. Alors

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Dans le cas où $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$, on peut utiliser cette règle à nouveau.

Example : $\lim_{z \to i} \frac{z^6+1}{z^2+1} = \lim_{z \to i} \frac{6z^5}{2z} = 3i^4 = 3$

Points singulier :

Un point en lequel une fonction $f(z)$ cesse d'être holomorphe est appelé un point singulier ou une singularité de f.

Il existe des types variés de singularités.

1. Singularités isolées. le point $z = z_0$ est appelé singularité isolée ou point singulier isolé de f, s'il existe $\delta > 0$ tel que le cercle $|z - z_0| = \delta$ ne contienne pas d'autre point singulier que z_0.

2. Pôles : s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = \ell \neq 0$, alors z_0 est appelé un pôle d'ordre n. Si $n = 1$, z_0 est appelé un pôle simple.

Example : $f(z) = \frac{1}{(z-2)^3}$ a un pôle triple en $z = 2$.

- Si $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$ où $f(z_0) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $z = z_0$ est appelé un zéro d'ordre n de g. Si $n = 1$, on dit que z_0 est un zero simple.

3. singularités apparentes : Le point singulier z_0 est appelé singularité apparente de f si $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe

Example : $z = 0$ est une singularité apparente de $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ puisque $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$.

4. Points de branchement.

Le point de branchement est point singulier d'une fonction multiforme.

En ce point s'echangent les differentes déterminations.

Example: $f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k\pi}{2}\right)}, \ k=0,1$

Le point $z=0$ est un point de branchement

5. Singularités essentielles:

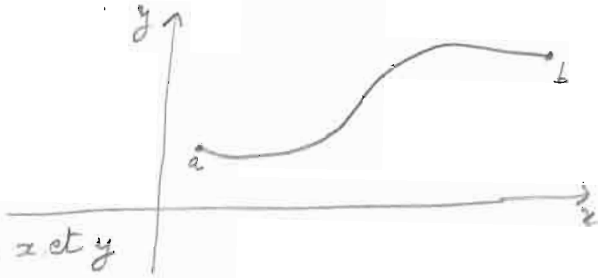
Une singularité qui n'est ni un pôle, ni un point de branchement, ni une singularité apparente est appelée singularité essentielle.

Example: $f(z) = e^{\frac{1}{z-2}}$ a une singularité essentielle en $z=2$.

Chapitre 4

Intégration dans le domaine complexe. - Théorème de Cauchy.

Intégrales curvilignes réelles :



Soit C une courbe dans le plan.

Soient $P(x,y)$, $Q(x,y)$ deux fonctions réelles de x et y continues dans tout point de C, l'intégrale curviligne de $P\,dx + Q\,dy$ le long de C est définie par

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \qquad \text{ou simplement} \quad \int_C P\,dx + Q\,dy$$

- Si C est continûment differentiable et $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ où $t_1 \leq t \leq t_2$ l'integrale précedente est donnée par

$$\int_{t_1}^{t_2} P(\phi(t), \psi(t))\, \phi'(t)\,dt + Q(\phi(t), \psi(t))\, \psi'(t)\,dt$$

Intégrale curviligne complexe :

Si $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, on a : $\quad z = x+iy$, $dz = dx + i\,dy$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u + iv)(dx + i\,dy)$$

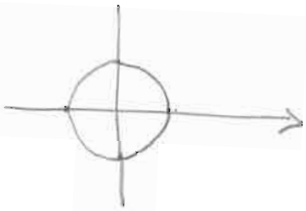
$$= \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy.$$

Si $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ $\quad t_1 \leq t \leq t_2$, alors

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} \left(u\cdot\phi'(t) - v\,\psi'(t)\right)dt + i\int_{t_1}^{t_2}\left(v\,\phi'(t) + u\,\psi'(t)\right)dt.$$

Exemple: Soit $C = \{ z \,/\, z = e^{it}, \quad t \in [-\pi, \pi] \}$

Évaluer l'intégrale $\int_C z^2 \, dz$



$z(t) = e^{it}$, $dz = z'(t)\,dt = i e^{it} dt$

$$\int_C z^2 dz = \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{it}\right)^2 i e^{it} dt = i \int_{-\pi}^{\pi} e^{3it} dt = i \int_{-\pi}^{\pi} \cos(3t) + i \sin(3t) \, dt$$

$$= i \int_{-\pi}^{\pi} \cos(3t) dt - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3t) dt = \left[\frac{i}{3} \sin(3t) \right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{-1}{3} \cos(3t) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Properietés des integrales:

Soient f et g deux fonctions intégrables le long C, alors

1. $$\int_C f(z) + g(z) \, dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) \, dz$$

2. $$\int_C \alpha f(z) \, dz = \alpha \int_C f(z) \, dz$$ α constante dans $\mathbb{C}$.

3. $$\int_a^b f(z) dz = - \int_b^a f(z) \, dz$$

4. $$\int_a^b f(z) dz = \int_a^d f(z) \, dz + \int_d^b f(z) \, dz$$, a, b, d des points dans la courbe C

(ML Théorème) 5. $$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML$$ où $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in C$

L designe la longueur de C

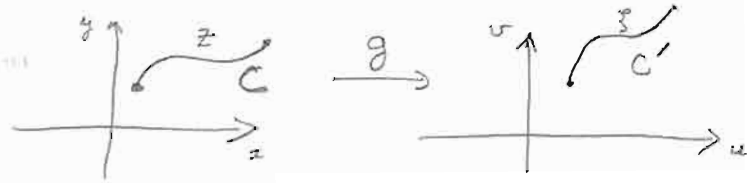
Si la courbe $C = \{ z(t) \,,\, t_1 \leq t \leq t_2 \}$, alors

$$L = \int_{t_1}^{t_2} |z'(t)| \, dt.$$

Changements de Variables :

. Soit $z = g(\xi)$ une fonction continûment dérivable de la variable $\xi = u + iv$

. Supposons qu'une $g(C) = C'$,



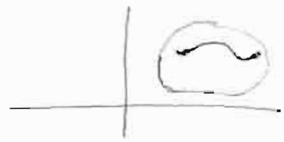
Alors :

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C'} f(g(\xi))\, g'(\xi)\, d\xi .$$

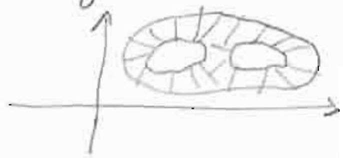
Ouverts simplement ou multiplement connexes :

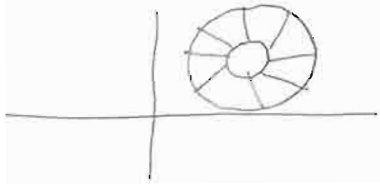
- Un ensemble S dans $\mathbb{C}$ est connexe, si pour tous 2 points de S peuvent être liés par une courbe linéaire par morceaux contenant dans S.

- Un ouvert connexe Ω est dit simplement connexe si toute courbe fermée peut être réduite à un point sans quitter Ω.



Dans le cas contraire Ω est dit multiplement connexe





Formule de Green :

Soit $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ dans $C^1(\bar{\Omega})$, Ω ouvert connexe dans $\mathbb{R}^2$.
C est la frontière de Ω.

La formule de Green établit que

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Cette formule est vraie pour les ouverts simplement connexes ou multiplement connexes.

Exemple : C = cercle de centre 0 et de rayon 1 $\rightarrow$ Ω = Disque de centre 0 et rayon 1

$$\int_C z^2 dz = \int_C (x+iy)^2 (dx + i\,dy) = \int_C (x^2 - y^2)\,dx - 2xy\,dy + i \int_C 2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$$

$$= \iint_D (-2y + 2y)\,dx\,dy + i \iint_D (2x - 2x)\,dx\,dy = 0$$