U.S.T.H.B. 2011-2012 Semestre 2 — **Math 4 : Analyse complexe**

Faculté de Mathématiques — **2ème Lic, ST-GP, Section C**

Théorème de Cauchy - Formules intégrales de Cauchy

Théorème de Cauchy : Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω et sur sa frontière C. Alors

$$\boxed{}\,.$$

Ce théorème fondamental est souvent appelé théorème de Cauchy, il est à la fois valable pour des ouverts simplement connexes ou multiple ment connexes.

Théorème de Morera : (réciproque du théorème de Cauchy)

Soit f une fonction continue dans un ouvert simplement connexe Ω, supposons que

$$\boxed{}$$

pour toute courbe fermée simple de Ω. Alors $\boxed{\phantom{f \text{ est holomorphe}}}$ dans Ω.

Exemple :

Intégrales indéfinies : (Primitives)

Si $f(z)$ et $F(z)$ sont holomorphes dans un ouvert connexe Ω et telles que $\boxed{}$, alors $\boxed{}$ est appelée intégrale indéfinie ou anti-dérivée de $\boxed{}$ et est notée

$$\boxed{}\,.$$

Exemple :

Quelques conséquences du théorème de Cauchy :

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert simplement connexe Ω. On a alors les théorèmes suivants.

Théorème 1 :

Si a et z sont deux points quelconques de Ω, alors est indépendant du chemin suivi pour aller de a à z.

Théorème 2 :

Si a et z sont deux points quelconques de Ω et si , alors $G(z)$ est holomorphe dans Ω et .

Théorème 3 :

Si a et b sont deux points quelconques de Ω et si , alors

.

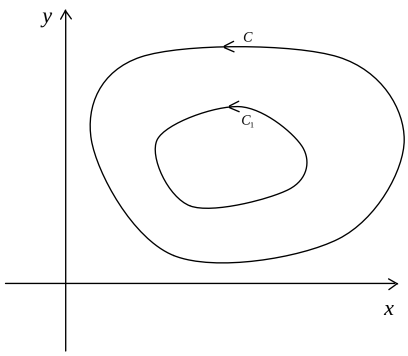
Exemple :

Théorème 4 :

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe limité par deux courbes fermées simples C et C_1 et sur ces courbes. Alors

.

où C et C_1 sont décrites dans le sens positif relatif à leur intérieur.



Formule intégrale de Cauchy

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C, soit a un point intérieur à C, alors

(1)

où le contour C est décrit dans le sens direct.

De même la n-ième dérivée de f en $z = a$ est donnée par

. (2)

- Les résultats (1) et (2) sont appelés formules intégrales de Cauchy et sont très remarquables car ils montrent que si une fonction f est connue sur la courbe fermée simple C, alors ses valeurs et les valeurs de toutes ses dérivées peuvent être calculées en tout point situé à l'intérieur de C.

Quelques théorèmes importants :

La liste suivante contient quelques théorèmes importants qui sont des conséquences des formules intégrales de Cauchy.

1. Théorème de Morera (réciproque du théorème de Cauchy).

Si f est continue dans un ouvert simplement connexe Ω et si sur toute courbe fermée simple de Ω, alors f est holomorphe dans Ω.

2. Inégalité de Cauchy

Si f est holomorphe à l'intérieur du cercle C et sur C, où C désigne le cercle d'équation $|z - a| = r$, alors

.

M désignant une constante telle que $|f(z)| < M$ sur C, i.e. M est une borne supérieure de $|f(z)|$ sur C.

3. Théorème de Liouville

Supposons que quel que soit z dans le plan complexe

(a) f est holomorphe **(b)** f est bornée, i.e. $|f(z)| < M$, où M désigne une constante.

Alors $\boxed{\qquad\qquad}$.

4. Théorème fondamental de l'algèbre

Toute équation algébrique $\boxed{\qquad\qquad}$ possède exactement n racines, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité.

5. Théorème de Gauss sur la valeur moyenne

Si f est holomorphe à l'intérieur du cercle C d'équation $|z - a| = r$ et sur C, alors $f(a)$ est la moyenne des valeurs de $f(z)$ sur C, i.e.

$$\boxed{\qquad\qquad}.$$

6. Théorème du module maximum

Si f est holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C, et sur C, si de plus f n'est pas constante alors le maximum de $\boxed{\qquad}$ est atteint sur C.

7. Théorème du module minimum

Si f est une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C, et sur C, si de plus $f(z) \neq 0$ à l'intérieur de C alors $\boxed{\qquad}$ atteint son minimum sur C.

8. Théorème de l'argument

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe formée simple C, et sur C, à l'exception d'un nombre fini de pôles intérieurs à C. On a alors

$$\boxed{\qquad\qquad}.$$

où N et P désignent respectivement le nombre de zéros et le nombre de pôles de $f(z)$ intérieurs à C.

9. Théorème de Rouché

Si f et g sont holomorphes dans et sur une courbe fermée simple C, et si $|g(z)| < |f(z)|$ sur C, alors $\boxed{\qquad\qquad}$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de C.