Théorème de Cauchy - Formules intégrales de Cauchy

Théorème de Cauchy : Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω et sur sa frontière C. Alors

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 0}.$$

Ce théorème fondamental est souvent appelé théorème de Cauchy, il est à la fois valable pour des ouverts simplement connexes ou multiple ment connexes.

Théorème de Morera : (réciproque du théorème de Cauchy)

Soit f une fonction continue dans un ouvert simplement connexe Ω, supposons que

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 0}$$

pour toute courbe fermée simple de Ω. Alors $\boxed{f \text{ est holomorphe}}$ dans Ω.

Exemple :

Soit $C = \left\{z \;/\; z = e^{it},\ t \in [-\pi, \pi]\right\}$. Calculer $\oint_C 2z dz$.

On a $dz = d\left(e^{it}\right) = ie^{it}dt$, alors

$$\oint_C 2zdz = \int_{-\pi}^{\pi} 2e^{it}\left(ie^{it}dt\right) = 2i\int_{-\pi}^{\pi} e^{2it}dt = \left[\,e^{2it}\right]_{-\pi}^{\pi} = 1 - 1 = 0.$$

Intégrales indéfinies : (Primitives)

Si $f(z)$ et $F(z)$ sont holomorphes dans un ouvert connexe Ω et telles que $\boxed{F'(z) = f(z)}$, alors $\boxed{F(z)}$ est appelée intégrale indéfinie ou anti-dérivée de $\boxed{f(z)}$ et est notée

$$\boxed{F(z) = \int f(z)\,dz}.$$

Exemple : On a $\dfrac{d}{dt}\left(3z^2 - 4\sin z\right) = 6z - 4\cos z$, alors

$$\int (6z - 4\cos z)\,dz = 3z^2 - 4\sin z + C, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Quelques conséquences du théorème de Cauchy :

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert simplement connexe Ω. On a alors les théorèmes suivants.

Théorème 1 :

Si a et z sont deux points quelconques de Ω, alors $\boxed{\int_a^z f(w)\,dw}$ est indépendant du chemin suivi pour aller de a à z.

Théorème 2 :

Si a et z sont deux points quelconques de Ω et si $\boxed{G(z)=\int_a^z f(w)\,dw}$, alors $G(z)$ est holomorphe dans Ω et $\boxed{G'(z)=f(z)}$.

Théorème 3 :

Si a et b sont deux points quelconques de Ω et si $\boxed{F'(z)=f(z)}$, alors

$$\boxed{\int_a^b f(z)\,dz=[F(z)]_a^b=F(b)-F(a)}.$$

Exemple : Calculer $\int_{3i}^{1-i} 4z dz.$

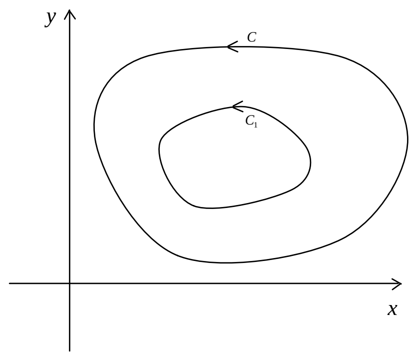
$$\int_{3i}^{1-i} 4z dz=\left[2z^2\right]_{3i}^{1-i}=2(1-i)^2-2(3i)^2=18-4i.$$

Théorème 4 :

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe limité par deux courbes fermées simples C et C_1 et sur ces courbes. Alors

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz=\oint_{C_1} f(z)\,dz}.$$

où C et C_1 sont décrites dans le sens positif relatif à leur intérieur.



Formule intégrale de Cauchy

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C, soit a un point intérieur à C, alors

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz} \tag{1}$$

où le contour C est décrit dans le sens direct.

De même la n-ième dérivée de f en $z = a$ est donnée par

$$\boxed{f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \quad n = 1, 2, 3, \ldots}. \tag{2}$$

- Les résultats (1) et (2) sont appelés formules intégrales de Cauchy et sont très remarquables car ils montrent que si une fonction f est connue sur la courbe fermée simple C, alors ses valeurs et les valeurs de toutes ses dérivées peuvent être calculées en tout point situé à l'intérieur de C.

Quelques théorèmes importants :

La liste suivante contient quelques théorèmes importants qui sont des conséquences des formules intégrales de Cauchy.

1. Théorème de Morera (réciproque du théorème de Cauchy).

Si f est continue dans un ouvert simplement connexe Ω et si $\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 0}$ sur toute courbe fermée simple de Ω, alors f est holomorphe dans Ω.

2. Inégalité de Cauchy

Si f est holomorphe à l'intérieur du cercle C et sur C, où C désigne le cercle d'équation $|z-a| = r$, alors

$$\boxed{\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{Mn!}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots}.$$

M désignant une constante telle que $|f(z)| < M$ sur C, i.e. M est une borne supérieure de $|f(z)|$ sur C.

3. Théorème de Liouville

Supposons que quel que soit z dans le plan complexe

(a) f est holomorphe **(b)** f est bornée, i.e. $|f(z)| < M$, où M désigne une constante.

Alors $\boxed{f \text{ est constante}}$.

4. Théorème fondamental de l'algèbre

Toute équation algébrique $\boxed{P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0,}$

possède exactement n racines, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité.

5. Théorème de Gauss sur la valeur moyenne

Si f est holomorphe à l'intérieur du cercle C d'équation $|z - a| = r$ et sur C, alors $f(a)$ est la moyenne des valeurs de $f(z)$ sur C, i.e.

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\theta}\right) d\theta}.$$

6. Théorème du module maximum

Si f est holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C, et sur C, si de plus f n'est pas constante alors le maximum de $\boxed{|f(z)|}$ est atteint sur C.

7. Théorème du module minimum

Si f est une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C, et sur C, si de plus $f(z) \neq 0$ à l'intérieur de C alors $\boxed{|f(z)|}$ atteint son minimum sur C.

8. Théorème de l'argument

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe formée simple C, et sur C, à l'exception d'un nombre fini de pôles intérieurs à C. On a alors

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P}.$$

où N et P désignent respectivement le nombre de zéros et le nombre de pôles de $f(z)$ intérieurs à C.

9. Théorème de Rouché

Si f et g sont holomorphes dans et sur une courbe fermée simple C, et si $|g(z)| < |f(z)|$ sur C, alors $\boxed{f(z) + g(z) \text{ et } f(z)}$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de C.