U.S.T.H.B. 2011-2012 Semestre 2 **Math 4 : Analyse complexe**

Faculté de Mathématiques **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section C**

<u>Séries infinies, séries de Taylor, séries de Laurent</u>

Séries de fonctions

À partir d'une suite de fonctions $\{u_n(z)\}$, nous formons une nouvelle suite $\{S_n(z)\}$ définie par

$$S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + ... + u_n(z)$$

où $S_n(z)$ appelée la $n^{ième}$ somme partielle est la somme des n premiers termes de la suite $\{u_n(z)\}$. La suite $S_n(z)$ est représentée par

$$\boxed{u_1(z) + u_2(z) + ... = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

appelée série infinie. Si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$, la série est dite $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ et $S(z)$ est sa somme ; dans le cas contraire la série est dite $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$.

<u>Théorème</u> : Une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n)$ converge, a_n et b_n étant réels, est que $\boxed{\qquad\qquad}$ et $\boxed{\qquad\qquad}$ convergent.

Convergence absolue. Une série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ est dite absolument convergente si la série des valeurs absolues, i.e. $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$, converge.

<u>Théorème</u> : Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ converge alors $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ converge. Autrement dit une série absolument convergente est $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$.

Séries entières

Une série de la forme

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \qquad (1)$$

est appelée série entière en $z - a$.

Rayon de convergence. Il existe un nombre positif R tel que (1) converge pour

et diverge pour , cependant que pour elle peut ou non converger.

Géométriquement si Γ est le cercle de rayon R centré en $z = a$, alors la série (1) converge en tous à Γ et diverge en tous ; elle peut ou non converger Γ.

Les valeurs spéciales et correspondent aux cas où (1) converge uniquement en ou converge pour toute valeur (finie) de z.

Le nombre R est souvent appelé de (1) et le cercle $|z-a| = R$ est appelé

Théorème : Nous pouvons obtenir le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ par

critère de d'Alembert : $R =$,

ou par

critère de Cauchy : $R =$,

si les limites existent.

Exemple : Trouver les rayons de convergence pour les séries suivantes.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$,

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$,

Théorème :

a) Une série entière peut être $\boxed{}$ terme à terme dans tout ouvert connexe situé à l'intérieur du cercle de convergence.

b) Une série entière peut être $\boxed{}$ terme à terme sur toute courbe C située entièrement à l'intérieur du cercle de convergence.

Séries de Taylor

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C. Alors

$$\boxed{f(a+h) = },$$

ou en posant . $z = a + h, \quad h = z - a,$

$$\boxed{f(z) = }.$$

Ceci est appelé le théorème de Taylor et les séries précédentes sont appelées séries de Taylor ou développement de Taylor de $f(a+h)$ ou $f(z)$.

Le domaine de convergence de la dernière série est défini par $\boxed{}$, le rayon de convergence R étant égal à la distance de a à la singularité de $f(z)$ la plus proche.

Sur $\boxed{}$ la série peut ou non converger.

Pour $\boxed{}$ la série diverge.

Si la singularité la plus proche est à l'infini, le rayon de convergence $\boxed{}$, i.e. la série converge quel que soit z.

Quelques séries particulières. La liste qui suit contient quelques séries particulières avec leurs domaines de convergence.

1. $\boxed{} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ... \qquad |z| < \infty.$
2. $\boxed{} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ... (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + ... \qquad |z| < \infty.$
3. $\boxed{} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ... (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + ... \qquad |z| < \infty.$

4. $\boxed{\quad\quad\quad} = z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \ldots (-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n} + \ldots \qquad |z| < 1.$

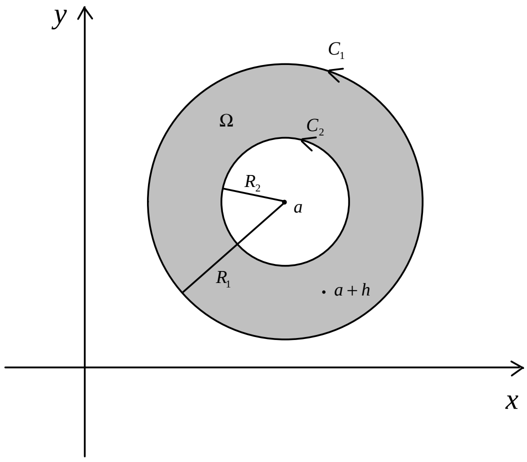
5. $\boxed{\quad\quad\quad} = z - \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{z^5}{5} - \ldots (-1)^{n-1}\dfrac{z^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \qquad |z| < 1.$

6. $\boxed{\quad\quad\quad} = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2!}z^2 + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}z^n + \ldots \qquad |z| < 1.$

Si $(1+z)^p$ est multiforme le résultat est valable pour la branche de la fonction qui prend la valeur 1 pour $z = 0$.

Séries de Laurent

Soit C_1 et C_2 des cercles concentriques, de centre a et de rayons respectifs R_1 et R_2, voir figure ci-contre. On suppose que f est uniforme et $\boxed{\quad\quad\quad}$ sur C_1 et C_2 et également dans la couronne Ω [ou région annulaire Ω] limitée par C_1 et C_2 et ombrée dans la figure ci-contre. Les courbes C_1 et C_2 étant décrits dans le sens positif par rapport à leurs intérieurs.



Soit $a + h$ un point quelconque de Ω, on a alors

$$\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$$

où

$$\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$$

et $C = C_1$ ou C_2. Avec le changement de notation $z = a + h$, on peut écrire

$$\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad} \qquad (2)$$

Ceci est appelé le théorème de Laurent et la formule ci-dessus est appelée une série de Laurent ou un développement de Laurent.

La partie $a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + a_3(z-a)^3 + \ldots$ est appelée la partie $\boxed{\quad\quad\quad}$ de la série de Laurent cependant que le reste de la série formé des puissances négatives de $z - a$

est appelé la partie $\boxed{}$. Si la partie $\boxed{}$ est nulle, la série de Laurent se réduit à une série de Taylor.

Exemple : Déterminer le développement en série de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3}\right)$$

dans la couronne $\Omega = \left\{\frac{3}{2} < |z| < \frac{5}{2}\right\}$.

Si $|z| > \dfrac{3}{2}$, on a

$$\boxed{}$$

Si $|z| < \dfrac{5}{2}$, on a

$$\boxed{}$$

Alors dans la couronne $\left\{\frac{3}{2} < |z| < \frac{5}{2}\right\}$ on a

$$\boxed{f(z) = }$$

Classification des singularités. Il est possible de classer les singularités d'une fonction f par l'examen de sa série de Laurent. Dans ce but nous supposerons dans la figure ci-dessus que $R_2 = 0$ si bien que f est $\boxed{}$ à l'intérieur de C_1 et sur C_1 excepté en $z = a$ qui est une $\boxed{}$.

1. Pôles. Si f à la forme (2) dans laquelle la partie principale ne possède qu'un nombre fini de termes donnés par

$$\boxed{}$$

où $a_{-n} \neq 0$, alors $z = a$ est appelé un $\boxed{}$.

Si $n = 1$ on a affaire à un $\boxed{}$.

Si $z = a$ est un pôle de f alors $\boxed{}$.

2. Singularités apparentes. Si une fonction uniforme f n'est pas définie en $z = a$ mais si $\boxed{}$ existe, alors $z = a$ est appelée une $\boxed{}$. Dans un pareil cas on définit $f(z)$ pour $z = a$ comme étant égal à $\lim\limits_{z \to a} f(z)$.

Exemple : Si $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ alors

3. Singularités essentielles. Si f est uniforme alors toute singularité qui n'est ni un pôle ni une singularité apparente est appelée une $\boxed{}$. Si $z = a$ est une singularité essentielle de $f(z)$, la partie principale du développement de Laurent possède une $\boxed{}$.

Exemple : Le développement de $e^{\frac{1}{z}}$ s'écrivant

4. Singularités à l'infini. En posant $z = \dfrac{1}{w}$ dans $f(z)$ on obtient la fonction $f\left(\dfrac{1}{w}\right) = F(w)$. Alors la nature de la singularité à $z = \infty$ [le point à l'infini] est définie comme étant la même que celle de $\boxed{}$.

Exemple :

a) La fonction $f(z) = z^3$

b) De la même façon $f(z) = e^z$