

Séries infinies, séries de Taylor, séries de LaurentSéries de fonctions

À partir d'une suite de fonctions $\{u_n(z)\}$, nous formons une nouvelle suite $\{S_n(z)\}$ définie par

$$S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z)$$

où $S_n(z)$ appelée la $n^{\text{ième}}$ somme partielle est la somme des n premiers termes de la suite $\{u_n(z)\}$. La suite $S_n(z)$ est représentée par

$$u_1(z) + u_2(z) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$$

appelée série infinie. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = S(z)$, la série est dite **convergente** et $S(z)$ est

sa somme ; dans le cas contraire la série est dite **divergente**.

Théorème : Une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n)$ converge, a_n et b_n

étant réels, est que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent.

Convergence absolue. Une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ est dite absolument convergente si la série des

valeurs absolues, i.e. $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$, converge.

Théorème : Si $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ converge alors $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ converge. Autrement dit une

série absolument convergente est **convergente**.

Séries entières

Une série de la forme

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad (1)$$

est appelée série entière en $z-a$.

Rayon de convergence. Il existe un nombre positif R tel que (1) converge pour $|z - a| < R$ et diverge pour $|z - a| > R$, cependant que pour $|z - a| = R$ elle peut ou non converger.

Géométriquement si Γ est le cercle de rayon R centré en $z = a$, alors la série (1) converge en tous

les points intérieurs

à Γ et diverge en tous

les points extérieurs

; elle peut ou non converger sur le cercle Γ .

Les valeurs spéciales $R = 0$ et $R = \infty$ correspondent aux cas où (1) converge

uniquement en $z = a$ ou converge pour toute valeur (finie) de z .

Le nombre R est souvent appelé le rayon de convergence de (1) et le cercle

$|z - a| = R$ est appelé le cercle de convergence.

Théorème : Nous pouvons obtenir le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$ par

critère de d'Alembert :
$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

ou par

critère de Cauchy :
$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

si les limites existent.

Exemple : Trouver les rayons de convergence pour les séries suivantes.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1.$$

La série converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| \geq 1$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $a_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = 1.$$

La série converge dans $|z| < 1$ et diverge en dehors i.e. $|z| > 1$. Sur le cercle $|z| = 1$, la série converge en certains points et diverge en d'autres points.

Théorème :

a) Une série entière peut être dérivée terme à terme dans tout ouvert connexe situé à l'intérieur du cercle de convergence.

b) Une série entière peut être intégrée terme à terme sur toute courbe C située entièrement à l'intérieur du cercle de convergence.

Séries de Taylor

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C . Alors

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \dots,$$

ou en posant $z = a + h$, $h = z - a$,

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots$$

Ceci est appelé le théorème de Taylor et les séries précédentes sont appelées séries de Taylor ou développement de Taylor de $f(a+h)$ ou $f(z)$.

Le domaine de convergence de la dernière série est défini par $|z-a| < R$, le rayon de convergence R étant égal à la distance de a à la singularité de $f(z)$ la plus proche.

Sur $|z-a| = R$ la série peut ou non converger.

Pour $|z-a| > R$ la série diverge.

Si la singularité la plus proche est à l'infini, le rayon de convergence $R = \infty$, i.e. la série converge quel que soit z .

Quelques séries particulières. La liste qui suit contient quelques séries particulières avec leurs domaines de convergence.

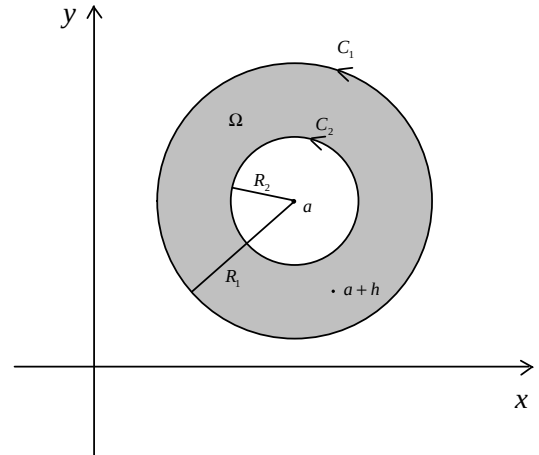
1. e^z $= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$ $|z| < \infty.$
2. $\sin z$ $= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$ $|z| < \infty.$
3. $\cos z$ $= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots$ $|z| < \infty.$

4. $\boxed{\text{Log } z} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots \quad |z| < 1.$
5. $\boxed{\text{Arctg } z} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad |z| < 1.$
6. $\boxed{(1+z)^p} = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} z^n + \dots \quad |z| < 1.$

Si $(1+z)^p$ est multiforme le résultat est valable pour la branche de la fonction qui prend la valeur 1 pour $z = 0$.

Séries de Laurent

Soit C_1 et C_2 des cercles concentriques, de centre a et de rayons respectifs R_1 et R_2 , voir figure ci-contre. On suppose que f est uniforme et $\boxed{\text{holomorphe}}$ sur C_1 et C_2 et également dans la couronne Ω [ou région annulaire Ω] limitée par C_1 et C_2 et ombrée dans la figure ci-contre. Les courbes C_1 et C_2 étant décrits dans le sens positif par rapport à leurs intérieurs.



Soit $a+h$ un point quelconque de Ω , on a alors

$$\begin{aligned} f(a+h) = & a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \dots \\ & + \frac{a_{-1}}{h} + \frac{a_{-2}}{h^2} + \frac{a_{-3}}{h^3} + \dots \end{aligned}$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

et $C = C_1$ ou C_2 . Avec le changement de notation $z = a+h$, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(z) = & a_0 + a_1 (z-a) + a_2 (z-a)^2 + a_3 (z-a)^3 + \dots \\ & + \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{a_{-3}}{(z-a)^3} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Ceci est appelé le théorème de Laurent et la formule ci-dessus est appelée une série de Laurent ou un développement de Laurent.

La partie $a_0 + a_1 (z-a) + a_2 (z-a)^2 + a_3 (z-a)^3 + \dots$ est appelée la partie $\boxed{\text{analytique}}$ de la série de Laurent cependant que le reste de la série formé des puissances négatives de $z-a$

est appelé la partie principale. Si la partie principale est nulle, la série de Laurent se réduit à une série de Taylor.

Exemple : Déterminer le développement en série de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} \right)$$

dans la couronne $\Omega = \left\{ \frac{3}{2} < |z| < \frac{5}{2} \right\}$.

Si $|z| > \frac{3}{2}$, on a

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{z}} \right) = \frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{1}{z} \right)^n = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \dots$$

Si $|z| < \frac{5}{2}$, on a

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{z}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{z}{3} \right)^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{z}{9} + \frac{z^2}{27} - \dots$$

Alors dans la couronne $\left\{ \frac{3}{2} < |z| < \frac{5}{2} \right\}$ on a

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} \right) = \dots - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{18} - \frac{z^2}{54} - \dots$$

Classification des singularités. Il est possible de classer les singularités d'une fonction f par l'examen de sa série de Laurent. Dans ce but nous supposons dans la figure ci-dessus que $R_2 = 0$ si bien que f est holomorphe à l'intérieur de C_1 et sur C_1 excepté en $z = a$ qui est une singularité isolée.

1. Pôles. Si f à la forme (2) dans laquelle la partie principale ne possède qu'un nombre fini de termes donnés par

$$\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{a_{-3}}{(z-a)^3} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$$

où $a_{-n} \neq 0$, alors $z = a$ est appelé un pôle d'ordre n .

Si $n = 1$ on a affaire à un pôle simple.

Si $z = a$ est un pôle de f alors $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.

2. Singularités apparentes. Si une fonction uniforme f n'est pas définie en $z = a$ mais si

$\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ existe, alors $z = a$ est appelée une **singularité apparente**. Dans un pareil cas on définit $f(z)$ pour $z = a$ comme étant égal à $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

Exemple : Si $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ alors $z = 0$ est une singularité apparente car $f(0)$ n'est pas défini mais $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$. On définit $f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$. On remarque que dans ce cas

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left\{ z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right\} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

3. Singularités essentielles. Si f est uniforme alors toute singularité qui n'est ni un pôle ni une singularité apparente est appelée une **singularité essentielle**. Si $z = a$ est une

singularité essentielle de $f(z)$, la partie principale du développement de Laurent possède une **infinité de termes**.

Exemple : Le développement de $e^{\frac{1}{z}}$ s'écrivant

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots,$$

on en déduit que $z = 0$ est une singularité essentielle.

4. Singularités à l'infini. En posant $z = \frac{1}{w}$ dans $f(z)$ on obtient la fonction $f\left(\frac{1}{w}\right) = F(w)$. Alors la nature de la singularité à $z = \infty$ [le point à l'infini] est définie comme étant la même que celle de $F(w)$ en $w = 0$.

Exemple :

a) La fonction $f(z) = z^3$ a un pôle triple en $z = \infty$

car $F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^3}$ possède un pôle triple en $z = 0$.

b) De la même façon $f(z) = e^z$ possède une singularité essentielle en $z = \infty$ car $F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = e^{\frac{1}{w}}$ a une singularité essentielle en $w = 0$.