Le théorème des résidus - Applications aux intégrales et aux séries

Résidus

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe et uniforme à l'intérieur d'un cercle C et sur C, **excepté** au point $z=a$ centre de C. Alors $f(z)$ possède un développement en série de Laurent dans le voisinage de $z=a$, donné par

$$\boxed{\begin{aligned} f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n = \ & a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots \\ & + \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{a_{-3}}{(z-a)^3} + \ldots \end{aligned}} \tag{1}$$

où

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \qquad n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots} \tag{2}$$

Dans le cas particulier $n=-1$ nous avons d'après (2)

$$\boxed{\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i a_{-1}.} \tag{3}$$

On peut obtenir formellement (3) à partir de (1) par intégration terme à terme en utilisant le résultat

$$\boxed{\oint_C \frac{1}{(z-a)^p} dz = \begin{cases} 2\pi i & p=1 \\ 0 & p\in\mathbb{Z},\ p\neq 1. \end{cases}} \tag{4}$$

L'intégrale de (3) s'exprimant à l'aide du seul coefficient a_{-1} de (1), on appelle a_{-1} le $\boxed{\text{résidu}}$ de $f(z)$ en $z=a$, et on le note par $\boxed{\mathrm{Res}\,(f,a)}$.

Calcul des résidus

Pour obtenir le résidu d'une fonction $f(z)$ en $z = a$ on pourrait croire d'après (1) à la nécessité d'écrire le développement de $f(z)$ en série de Laurent dans le voisinage de $z = a$.

Dans le cas où $z = a$ est un **pôle d'ordre** k il existe une formule simple qui donne a_{-1}

$$\boxed{a_{-1} = \lim_{z \to a} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left\{ (z-a)^k f(z) \right\}} \tag{5}$$

Si $k = 1$ (**pôle simple**) le résultat est particulièrement simple

$$\boxed{a_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)} \tag{6}$$

Exemple 1 :

Si $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$, alors $\boxed{z = 1}$ et $\boxed{z = -1}$ sont respectivement $\boxed{\text{des pôles d'ordre 1 et 2}}$.

On a d'après (6) et (5) avec $k = 2$,

$$\boxed{\text{Résidu en } z = 1\text{: } \lim_{z \to 1} (z-1) \left\{ \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right\} = \frac{1}{4}}.$$

$$\boxed{\text{Résidu en } z = -1\text{: } \lim_{z \to -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ (z+1)^2 \left(\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right) \right\} = -\frac{1}{4}}.$$

Si $z = a$ est un **point singulier essentiel**, le résidu peut parfois être trouvé en utilisant des développements en série connus.

Exemple 2 :

Si $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$, alors $\boxed{z = 0}$ est un $\boxed{\text{point singulier essentiel}}$ et d'après le développement connu

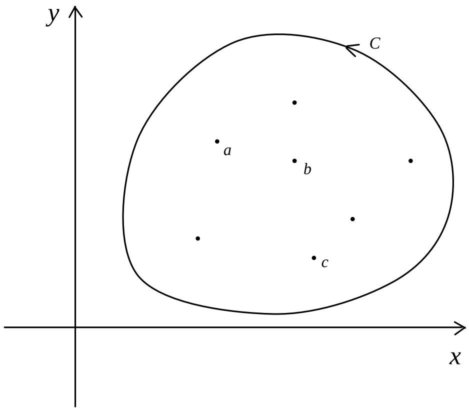
$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots$$

avec $u = -\dfrac{1}{z}$, on trouve

$$\boxed{e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} - \frac{1}{3! z^3} + \dots}$$

où l'on voit que le résidu en $z = 0$ étant le coefficient de $\dfrac{1}{z}$ sa valeur est $\boxed{-1}$.

Le théorème des résidus



Soit $f(z)$ une fonction uniforme et holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C, sauf en des singularités a, b, c, ... intérieures à C pour lesquelles les résidus de $f(z)$ sont $z_1 = a_{-1}$, $z_2 = b_{-1}$, $z_3 = c_{-1}$, ... [voir figure ci-contre]. Alors le théorème des résidus établit que

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\,(a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \ldots)}$$

ou

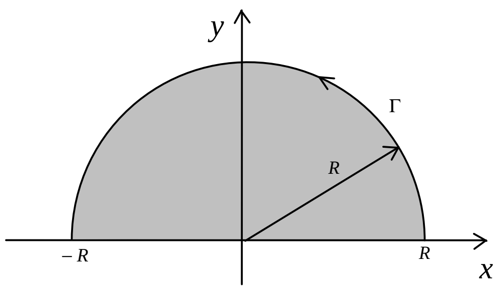
$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}\,(f, z_k)}.$$

i.e. L'intégrale de $f(z)$ le long de C est égale à $2\pi i$ fois la somme des résidus de $f(z)$ en les singularités contenues dans C. Notons que le théorème de Cauchy et les formules intégrales sont des cas particuliers de ce théorème.

Calcul d'intégrales définies

Le calcul d'intégrales définies peut souvent être effectué en utilisant le **théorème des résidus** appliqué à une **fonction** et à un **contour** convenables dont le choix peut demander une grande **ingéniosité**. Les types d'intégrales qui suivent sont souvent rencontrées dans la pratique.

1. $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx}$, $F(x)$ est une fraction **rationnelle**.



On considère $\oint_C F(z)\,dz$ le long d'un **contour** C formé d'une portion de l'axe des x de $-R$ à $+R$ et du demi-cercle Γ du demi-plan supérieur $y > 0$, ayant l'axe des x pour diamètre, voir figure ci-contre.

On fait alors tendre R vers ∞. Si $F(z)$ est une fonction paire cette méthode peut être utilisée pour calculer $\boxed{\int_0^{\infty} F(x)\,dx}$.

2. $\boxed{\int_0^{2\pi} G(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta}$, $G(\cos\theta, \sin\theta)$ est une fraction rationnelle de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Soit $z = e^{i\theta}$, alors $\sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, $\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$ et $dz = ie^{i\theta}d\theta$ ou $d\theta = \frac{1}{iz}dz$.

L'intégrale donnée est égale à $\oint_C F(z)\, dz$ où C est le cercle unité centré à l'origine.

3. $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\{\cos mx, \sin mx\}\, dx}$, $F(x)$ est une fraction **rationnelle**.

Dans ce cas on considère $\oint_C F(z)\, e^{imz}dz$ où C est le même contour que dans **1**.

4. Intégrales diverses nécessitant des contours particulier.

Théorèmes particuliers utilisés pour le calcul d'intégrales.

Lorsque l'on calcule des intégrales analogues à celles des types **1** et **3** ci-dessus, il est souvent nécessaire de montrer que $\int_\Gamma F(z)\, dz$ et $\int_\Gamma F(z)\, e^{imz}dz$ tendent vers zéro quand $R \to \infty$. Les théorèmes suivants sont fondamentaux.

Théorème 1 : Si $|F(z)| \leq \frac{M}{R^k}$ pour $z = R\, e^{i\theta}$, où $k > 1$ et M sont des constantes, alors si Γ est le demi-cercle de la figure ci-dessus, $\boxed{\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma F(z)\, dz = 0}$.

Théorème 2 : Si $|F(z)| \leq \frac{M}{R^k}$ pour $z = R\, e^{i\theta}$, où $k > 0$ et M sont des constantes, alors si Γ est le demi-cercle de la figure ci-dessus, $\boxed{\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma e^{imz} F(z)\, dz = 0}$.

Calcul des sommes de séries

Le théorème des résidus peut souvent être utilisé pour calculer la somme de types variés de séries. Les résultats suivants sont valables moyennant peu de restrictions sur $f(z)$, les conditions de validité sont généralement remplies quand la série converge.

1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\{$somme des résidus de $\pi\cot(\pi z) f(z)$ en tous les pôles de $f(z)\}$.
2. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\{$somme des résidus de $\frac{\pi}{\sin\pi z} f(z)$ en tous les pôles de $f(z)\}$.
3. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \{$somme des résidus de $\pi\tan(\pi z) f(z)$ en tous les pôles de $f(z)\}$.
4. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \{$somme des résidus de $\frac{\pi}{\cos\pi z} f(z)$ en tous les pôles de $f(z)\}$.