U.S.T.H.B. 2011-2012 Semestre 2 — **Math 4 : Analyse complexe**

Faculté de Mathématiques — **2ème Lic, ST - GP, Section C**

Série d'exercices N° 1 : Nombres complexes

==========

Exercice 1 : Soient $z = 2 - i, w = 1 + 3i$.

Écrire les nombres complexes suivants sous forme $x + iy$.

a) $\dfrac{z}{w}$, **b)** $\dfrac{zw}{z+w}$.

Solution. Pour écrire un quotient de deux nombres complexes sous forme algébrique $x+iy$, on multiplie et on divise par le conjugué du dénominateur. Noter que le conjugué de $a + ib$ est $a - ib$.

a) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{2-i}{1+3i} = \dfrac{(2-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \dfrac{2-6i-i+3i^2}{1^2-(3i)^2} = \dfrac{2-7i-3}{1+9} = \dfrac{-1}{10} - \dfrac{7}{10}i.$

b) $\dfrac{zw}{z+w} = \dfrac{(2-i)(1+3i)}{2-i+1+3i} = \dfrac{5+5i}{3+2i} = \dfrac{(5+5i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \dfrac{25}{13} + \dfrac{5}{13}i.$

==========

Exercice 2 : Trouver le module et l'argument principal des nombres complexes suivants:

a) $z = 4 + 3i$, **b)** $z = -\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$, **c)** $z = \cos\theta - i\sin\theta$ $\left(\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$.

Solution. Le module ou la valeur absolue d'un nombre complexe $a+ib$ est définie par $r = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$.

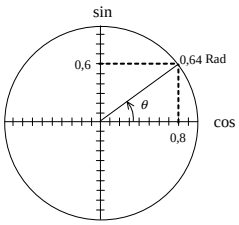
L'argument principale d'un nombre complexe non nul $a + ib$ est l'angle $\theta \in \,]-\pi, \pi]$ définie par $\cos\theta = \dfrac{a}{r}, \sin\theta = \dfrac{b}{r}$.

a)

$r = |4+3i| = \sqrt{4^2+3^2} = 5,$

$\cos\theta = \dfrac{4}{5},\ \sin\theta = \dfrac{3}{5},$

alors l'argument principale $\theta \simeq 0,64$ Rad.



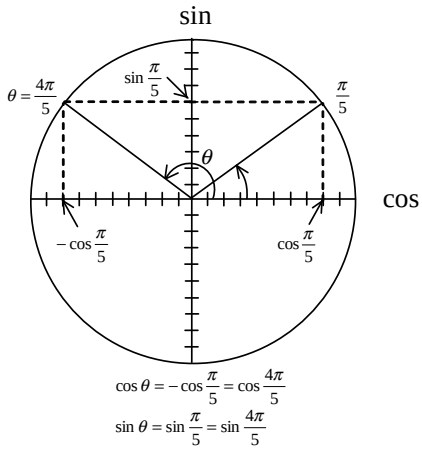
b)

$$r = \left|-\cos\tfrac{\pi}{5} + i\sin\tfrac{\pi}{5}\right| = \sqrt{\left(-\cos\tfrac{\pi}{5}\right)^2 + \left(\sin\tfrac{\pi}{5}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\cos^2\tfrac{\pi}{5} + \sin^2\tfrac{\pi}{5}} = 1,$$

$$\cos\theta = \frac{-\cos\frac{\pi}{5}}{1} = -\cos\frac{\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right),$$

$$\sin\theta = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{1} = \sin\frac{\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right),$$

d'où l'argument principale $\theta = \dfrac{4\pi}{5}$.

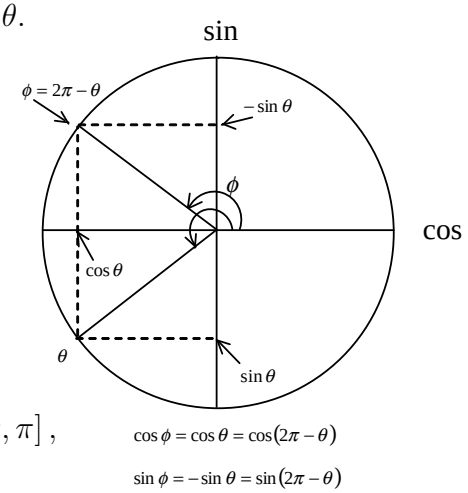


c)

On note l'argument de z par ϕ pour ne pas confondre avec θ.

$$r = |\cos\theta - i\sin\theta| \quad = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2}$$
$$= \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1,$$

$$\cos\phi = \frac{\cos\theta}{1} = \cos\theta = \cos(-\theta) = \cos(2\pi - \theta),$$
$$\sin\phi = \frac{-\sin\theta}{1} = -\sin\theta = \sin(-\theta) = \sin(2\pi - \theta),$$



On a ajouté 2π à $-\theta$ pour que ϕ soit dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, alors l'argument principale de z est $\phi = 2\pi - \theta$.

==========

<u>Exercice 3</u> : Représenter les ensembles des points suivants dans le plan complexe.

a) $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - 3i| \leq |z - 3|\}$, **b)** $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - i| < 3\}$, **c)** $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - i| > 3\}$,

d) $\{z \in \mathbb{C} \ / \ \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}\, z < 1\}$.

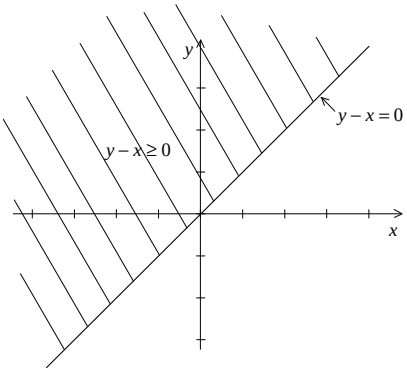
Solution.

a)

Si $z = x + iy$, l'inégalité $|z - 3i| \leq |z - 3|$ devient alors, en prenant le carré de deux membres

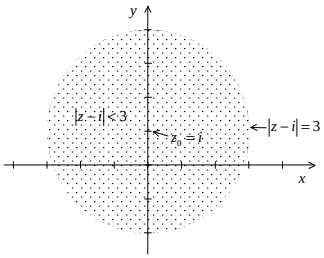
$$x^2 + (y-3)^2 \leq (x-3)^2 + y^2 \quad \text{ou} \quad -6y \leq -6x.$$

D'où $y - x \geq 0$. L'ensemble $|z - 3i| \leq |z - 3|$ est donc la partie dessus de la droite $y - x = 0$, la droite y comprise. Dans la figure ci-contre, c'est la partie hachurée.



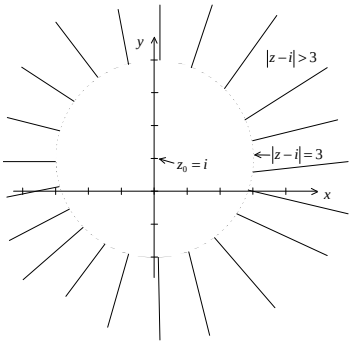
b)

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - i| < 3\}$ est un disque de centre $z_0 = i \equiv (0, 1)$ et de rayon $r = 3$, le cercle $|z - i| = 3$ non compris. Voir la figure ci-contre.



c)

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - i| > 3\}$ est l'extérieur du cercle de centre $z_0 = i \equiv (0, 1)$ et de rayon $r = 3$, le cercle non compris. C'est la partie hachurée dans la figure ci-contre.



d)

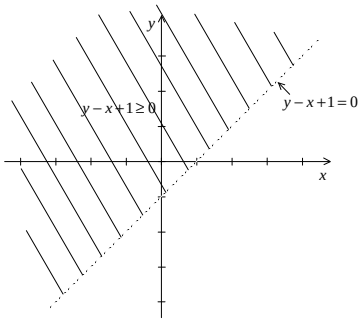
L'ensemble $\mathrm{Re}\,(z) - \mathrm{Im}\, z < 1$ s'écrit sous forme

$x - y < 1$ ou $y - x + 1 > 0$.

C'est la partie dessus de la droite $y - x + 1 = 0$,

la droite non comprise.

Voir la partie hachurée dans la figure ci-contre.



==========

<u>Exercice 4</u> : Parmi les ensembles suivants, trouver ceux qui sont

a) Connexes **b)** Bornés **c)** Compacts.

a) $\{z \in \mathbb{C} \ / \ \mathrm{Im}\, z > 0\}$, **b)** $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - i| \geq 3\}$, **c)** $\{1, i, -2, 1 + 3i\}$, **d)** $\mathbb{C}$,

e) $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - 1| < 1\}$.

Solution. Vous pouvez sauter cet exercice ou seulement le lire, ne vous inquiétez pas si vous ne le comprends pas en première lecture, vous le comprendrez InchaAllah un jour.

On rappelle les notions suivantes :

1. Voisinages. Un delta, ou δ, voisinage d'un point z_0 est l'ensemble de tous les points z tels que $|z - z_0| < \delta$ où δ est un nombre positif donné.

2. Points limites. Un point z_0 est appelé point limite ou point d'accumulation d'un ensemble de points S si tout δ voisinage de z_0 contient des points de $S \setminus \{z_0\}$.

3. Ensembles fermés. Un ensemble S est dit fermé si tout point d'accumulation de S appartient à S.

4. Ensembles bornés. Un ensemble S est dit borné si l'on peut trouver une constante M telle que $|z| < M$ pour tout point z de S.

5. Ensembles compacts. Un ensemble qui est à la fois fermé et borné est appelé compact.

6. Intérieur et points frontières. Un point z_0 est appelé point intérieur d'un ensemble S si l'on peut trouver un δ voisinage de z_0 dont tous les points appartiennent à S. Si tout δ voisinage de z_0 contient des points appartenant à S et aussi des points n'appartenant pas à S, alors z_0 est dit point frontière.

7. Ensembles ouverts. Un ensemble ouvert est un ensemble qui ne possède que des points intérieurs. Par exemple, l'ensemble des points z tels que $|z| < 1$ est un ensemble ouvert.

8. Ensembles connexes. Un ensemble ouvert S est dit connexe si deux points quelconques de S peuvent être joints par un chemin formé de segments de droites dont tous les points appartiennent à S.

Maintenant, nous revenons à notre exercice.

a)

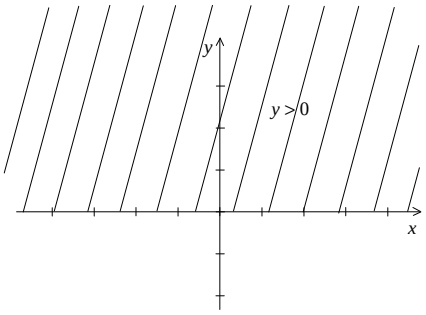
L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Im} z > 0\}$ ou $y > 0$

est la partie dessus de l'axe des x, ce qui est

connexe,

non borné,

et non compacte.



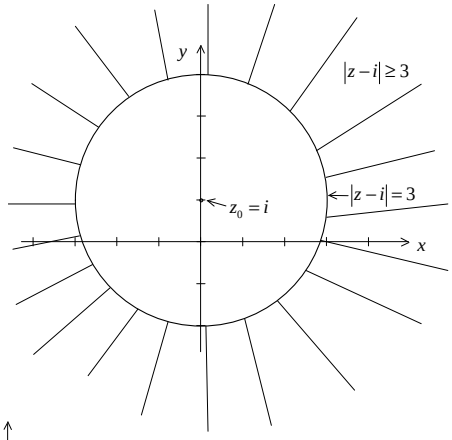
b)

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - i| \geq 3\}$ est l'extérieur du cercle de centre $z_0 = i \equiv (0, 1)$ et de rayon $r = 3$, le cercle compris. Cet ensemble est

connexe,

non borné,

et non compacte.



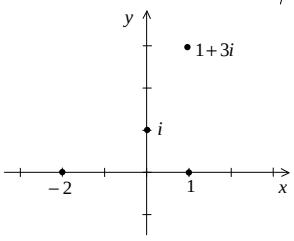
c)

L'ensemble $\{1, i, -2, 1 + 3i\}$ est

non connexe,

borné,

et compacte.



d)

L'ensemble $\mathbb{C}$ ou le plan complexe entier est connexe, non borné et non compacte.

e)

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - 1| < 1\}$ est

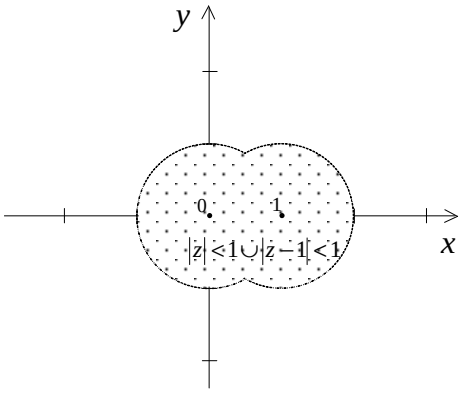
l'union de deux disques croisés (la frontière non comprise),

cet ensemble est

connexe,

borné,

et non compacte.



==========

<u>Exercice 5</u> : Résoudre les équations : **a)** $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = 0$, **b)** $(z - 1)^4 = 1$.

Solution.

a) Tout d'abord, on remarque que $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = (z + 1)^3 + 2$, donc notre problème revient à

résoudre l'équation $(z+1)^3 = -2$. En écrivant -2 sous forme polaire,

$$(z+1)^3 = 2\left\{\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)\right\}, k \in \mathbb{Z},$$

alors, d'après la formule de De Moivre, $z+1 = 2^{\frac{1}{3}}\left\{\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$ ou

$$z = 2^{\frac{1}{3}}\left\{\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\right\} - 1,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Si $k=0,\ z = z_0 = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) - 1 = 2^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1.$

Si $k=1,\ z = z_1 = 2^{\frac{1}{3}}(\cos\pi + i\sin\pi) - 1 = -2^{\frac{1}{3}} - 1.$

Si $k=2,\ z = z_2 = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) - 1 = 2^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1.$

En considérant $k = 3, 4, \ldots$ aussi bien que des valeurs négatives $-1, -2, \ldots$ on retrouve les trois valeurs de z déjà obtenues. Ce sont donc les seules solutions ou racines de l'équation donnée. En général, pour les racines n-ièmes, $k = 0, 1, \ldots n-1$, et il y en a n.

b) Sous forme polaire $1 = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = (z-1)^4$, $k \in \mathbb{Z}$. D'après la formule de De Moivre, $z - 1 = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}$ ou $z = 1 + \cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Si $k=0,\ z = z_0 = 1 + \cos 0 + i\sin 0 = 1 + 1 = 2.$

Si $k=1,\ z = z_1 = 1 + \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 1 + i.$

Si $k=2,\ z = z_2 = 1 + \cos\pi + i\sin\pi = 1 - 1 = 0.$

Si $k=3,\ z = z_3 = 1 + \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = 1 - i.$

==========

<u>Exercice 6</u> : Donner les nombres complexes suivants sous forme $x + iy$.

a) $(1+i)^{1000}$, **b)** $\left(\sqrt{3} - i\right)^3\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{-5}$

Solution.

a) Sous forme polaire $1 + i = \sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right\}$. En élevant à la puissance 1000 les deux membres de cette égalité et à l'aide de la formule de De Moivre

$$\begin{aligned}(1+i)^{1000} &= \sqrt{2}^{1000}\left\{\cos\left(1000\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right) + i\sin\left(1000\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)\right\}\\ &= \sqrt{2}^{1000}\left\{\cos(250\pi + 2000k\pi) + i\sin(250\pi + 2000k\pi)\right\}\\ &= 2^{500}(1 + i0) = 2^{500}.\end{aligned}$$

b) Sous forme polaire

$$\begin{aligned}\sqrt{3} - i &= 2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)\right\},\\ -1 + i\sqrt{3} &= 2\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)\right\}.\end{aligned}$$

D'après la formule de De Moivre,

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^3 = 2^3\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}+6k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+6k\pi\right)\right\},$$
$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{-5} = 2^{-5}\left\{\cos\left(-\frac{10\pi}{3}-10k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{10\pi}{3}-10k\pi\right)\right\}.$$

Si on a deux nombres complexes s'écrivant sous forme polaire $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2\right)$ et $z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$, alors le produit $z_1 z_2 = r_1 r_2\left\{\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right\}$.

On en déduit que

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-i\right)^3\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{-5} &= 2^3 2^{-5}\left\{\cos\left(-\frac{23\pi}{6}-4k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{23\pi}{6}-4k\pi\right)\right\}\\ &= 2^{-2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2^{-2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{8}i.\end{aligned}$$

==========

<u>Exercice 7</u> : Calculer $i^{\frac{1}{6}}$ et représenter les résultats dans le plan complexe.

Solution. $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\ \ k\in\mathbb{Z}.$

$$i^{\frac{1}{6}} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right),\ k=0,1,...5.$$

Si $k=0,\ z=z_0=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\simeq 0.97+0.26i.$

Si $k=1,\ z=z_1=\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\simeq 0.26+0.97i.$

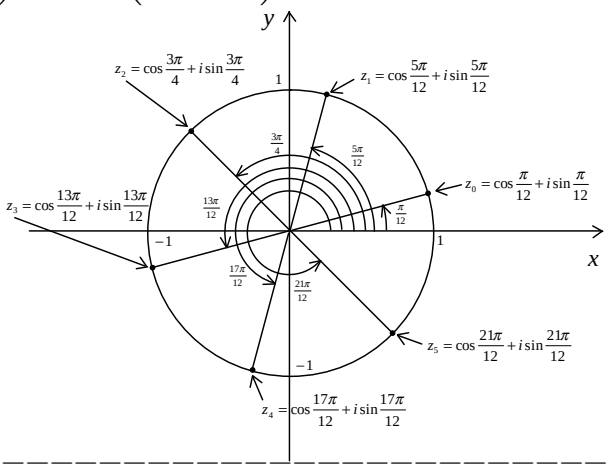
Si $k=2,\ z=z_2=\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i.$

Si $k=3,\ z=z_3=\cos\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)=\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\simeq -0.97-0.26i.$

Si $k=4,\ z=z_4=\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\simeq -0.26-0.97i.$

Si $k=5,\ z=z_5=\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{3}\right)=\cos\frac{21\pi}{12}+i\sin\frac{21\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i.$

Ces racines sont représentées dans la figure ci-contre. On notera qu'elles sont également réparties sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine.



==========

Exercice 8 :

Calculer les sommes suivantes:

$$\textbf{a)}\ \sin x + \sin 2x + ... + \sin nx,\ \textbf{b)}\ \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx.$$

Solution. Posons $C_n = \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx$ et $S_n = \sin x + \sin 2x + ... + \sin nx$. Si $z = \cos x + i \sin x$, alors d'après la formule de De Moivre,

$$z^2 = \cos 2x + i \sin 2x,\ z^3 = \cos 3x + i \sin 3x, ...z^n = \cos nx + i \sin nx.$$

Par addition membre à membre de ces formules,

$$\begin{aligned} z + z^2 + ... + z^n &= \cos x + i \sin x + \cos 2x + i \sin 2x + ... + \cos nx + i \sin nx \\ &= C_n + iS_n. \end{aligned}$$

Le terme à gauche est la somme de n termes d'une suite géométrique de raison $r = z$ et de premier terme z. Cette somme peut s'écrire sous la forme

$$z + z^2 + ... + z^n = z\frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{z - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Alors $C_n = \text{Re}\left(\dfrac{z - z^{n+1}}{1 - z}\right)$ et $S_n = \text{Im}\left(\dfrac{z - z^{n+1}}{1 - z}\right)$, donc il nous reste à séparer les parties réelle et imaginaire de $\dfrac{z - z^{n+1}}{1 - z}$.

Nous avons

$$\frac{z - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{\left(z - z^{n+1}\right) z^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{n+1}{2}} z^{\frac{n+1}{2}}}{(1 - z)\, z^{-\frac{1}{2}}} = \frac{z^{\frac{n+1}{2}} \left(z^{-\frac{n}{2}} - z^{\frac{n}{2}}\right)}{\left(z^{-\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}}\right)}.$$

Puisque $z^{-\frac{n}{2}} - z^{\frac{n}{2}} = -2i \sin \frac{nx}{2}$ et $z^{\frac{n+1}{2}} = \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) + i \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)$, alors

$$\frac{z - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{-2i \sin \frac{nx}{2} \left\{\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) + i \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\right\}}{-2i \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin \frac{x}{2}} + i\frac{\sin \frac{nx}{2} \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin \frac{x}{2}}.$$

D'où

$$\begin{aligned} C_n &= \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin \frac{x}{2}}, \\ S_n &= \sin x + \sin 2x + ... + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

==========