U.S.T.H.B. 2011-2012 Semestre 2 **Math 4 : Analyse complexe**
Faculté de Mathématiques **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST - GP, Section C**

Série d'exercices N° 2 : Fonctions élémentaires

==

Exercice 1 : Démontrer les relations suivantes :

a) $|\sin z| = \sqrt{\text{ch}^2 y - \cos^2 x}$, **b)** $|\cos z| = \sqrt{\text{ch}^2 y - \sin^2 x}$,

c) $|\text{sh } z| = \sqrt{\text{ch}^2 x - \cos^2 y}$, **d)** $|\text{ch } z| = \sqrt{\text{ch}^2 x - \sin^2 y}$.

Solution. Nous pouvons calculer le module d'un nombre complexe w, soit par définition en identifiant ses parties réelles et imaginaires ou par la propriété $|w|^2 = w\overline{w}$.

Nous allons utiliser la propriété $|w|^2 = w\overline{w}$ ici.

- **a)** $|\sin z|^2 = \sin z \overline{\sin z} = \left(\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)\left(\dfrac{e^{-i\overline{z}} - e^{i\overline{z}}}{-2i}\right) = \dfrac{e^{i(z-\overline{z})} - e^{i(z+\overline{z})} - e^{-i(z+\overline{z})} + e^{-i(z-\overline{z})}}{4}$.
  Puisque $z - \overline{z} = 2iy$ et $z + \overline{z} = 2x$, on a
  $|\sin z|^2 = \dfrac{e^{-2y} - e^{2ix} - e^{-2ix} + e^{2y}}{4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{2y} + e^{-2y}}{2} - \dfrac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\text{ch}\,(2y) - \cos\,(2x)\right)$.
  En utilisant les transformations $\text{ch}(2y) = 2\ \text{ch}^2 y - 1$ et $\cos\,(2x) = 2\cos^2 x - 1$, on trouve le résultat demandé $|\sin z|^2 = \dfrac{1}{2}\left(2\ \text{ch}^2 y - 1 - (2\cos^2 x - 1)\right) = \text{ch}^2 y - \cos^2 x$.

- **b)**
  $$|\cos z|^2 = \cos z \overline{\cos z} = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)\left(\frac{e^{-i\overline{z}} + e^{i\overline{z}}}{2}\right) = \frac{e^{i(z-\overline{z})} + e^{i(z+\overline{z})} + e^{-i(z+\overline{z})} + e^{-i(z-\overline{z})}}{4}$$
  $$= \frac{e^{-2y} + e^{2ix} + e^{-2ix} + e^{2y}}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2} + \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right)$$
  $$= \frac{1}{2}\left(\text{ch}\,(2y) + \cos\,(2x)\right).$$

  Par les transformations $\text{ch}(2y) = 2\ \text{ch}^2 y - 1$ et $\cos\,(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, on obtient la relation cherchée $|\cos z|^2 = \dfrac{1}{2}\left(2\ \text{ch}^2 y - 1 + 1 - 2\sin^2 x\right) = \text{ch}^2 y - \sin^2 x$.

- **c)** Nous avons $\text{sh } z = \text{sh } (x + iy) = \dfrac{e^{x+iy} - e^{-(x+iy)}}{2} = \dfrac{e^{i(y-ix)} - e^{-i(y-ix)}}{2} = i\sin\,(y - ix)$.
  D'après la relation **a)**,
  $$|\text{sh } z| = |i\sin\,(y - ix)| = |\sin\,(y - ix)| = \sqrt{\text{ch}^2\,(-x) - \cos^2 y} = \sqrt{\text{ch}^2 x - \cos^2 y}.$$

- **d)** $\text{ch } z = \text{ch } (x + iy) = \dfrac{e^{x+iy} + e^{-(x+iy)}}{2} = \dfrac{e^{i(y-ix)} + e^{-i(y-ix)}}{2} = \cos\,(y - ix)$.
  D'après la relation **b)**, $|\text{ch } z| = |\cos\,(y - ix)| = \sqrt{\text{ch}^2\,(-x) - \sin^2 y} = \sqrt{\text{ch}^2 x - \sin^2 y}$.

==

Exercice 2 : Vérifier que si $z_0 = \pi + i\,\mathrm{Log}\left(2+\sqrt{5}\right)$, alors $|\sin z_0| = 2$.

Solution. D'après l'**exercice 1 a)**,

$$|\sin z_0| = \sqrt{\mathrm{ch}^2 y_0 - \cos^2 x_0} = \sqrt{\mathrm{ch}^2\left(\mathrm{Log}\left(2+\sqrt{5}\right)\right) - \cos^2(\pi)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{e^{\mathrm{Log}\left(2+\sqrt{5}\right)} + e^{-\mathrm{Log}\left(2+\sqrt{5}\right)}}{2}\right)^2 - (-1)^2} = \sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{5}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}}{2}\right)^2 - 1}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{5}+\frac{2-\sqrt{5}}{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}}{2}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{5}+\frac{2-\sqrt{5}}{-1}}{2}\right)^2 - 1}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{5}-2+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 1} = 2.$$

==

Exercice 3 : Séparer les parties réelles et imaginaires des fonctions suivantes :

a) $f(z) = e^{-z}$, **b)** $f(z) = \sin z$, **c)** $f(z) = 2^{z^2}$, **d)** $f(z) = \mathrm{ch}(z-i)$, **e)** $f(z) = z^{2-i}$.

Solution. a) $f(z) = e^{-z} = e^{-(x+iy)} = e^{-x}e^{-iy} = e^{-x}(\cos y - i\sin y) = e^{-x}\cos y - ie^{-x}\sin y$,

$$\textbf{b)}\ f(z) = \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y+ix}-e^{y-ix}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2i} = \frac{(e^{-y}-e^{y})\cos x}{2i} + \frac{i(e^{-y}+e^{y})\sin x}{2i}$$

$$= i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x + \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\sin x = \mathrm{ch}(y)\sin x + i\,\mathrm{sh}(y)\cos x.$$

<u>Autre méthode</u> : $\sin z = \sin(x+iy) = \sin x\cos(iy) + \cos x\sin(iy)$.

Puisque $\cos(iy) = \mathrm{ch}(y)$ et $\sin(iy) = i\,\mathrm{sh}(y)$, on trouve $\sin z = \sin x\,\mathrm{ch}(y) + i\cos x\,\mathrm{sh}(y)$.

c) $f(z) = 2^{z^2} = e^{z^2\mathrm{Log}(2)} = e^{(x+iy)^2(\ln(2)+2ik\pi)},\ k\in\mathbb{Z}$

$$= e^{\left(x^2-y^2+2ixy\right)(\ln(2)+2ik\pi)} = e^{\left(x^2-y^2\right)\ln(2)-4k\pi xy+2i\left\{\left(x^2-y^2\right)k\pi+xy\ln 2\right\}}$$

$$= e^{\left(x^2-y^2\right)\ln(2)-4k\pi xy}\left\{\cos\left[2\left(x^2-y^2\right)k\pi+2xy\ln 2\right] + i\sin\left[2\left(x^2-y^2\right)k\pi+2xy\ln 2\right]\right\}.$$

Pour la détermination principale ($k=0$), $f(z) = 2^{\left(x^2-y^2\right)}\left\{\cos(2xy\ln 2) + i\sin(2xy\ln 2)\right\}$.

d) $f(z) = \mathrm{ch}(z-i) = \mathrm{ch}(x+i(y-1)) = \mathrm{ch}(x)\ \mathrm{ch}(i(y-1)) + \mathrm{sh}(x)\ \mathrm{sh}(i(y-1))$.

En notant que $\mathrm{ch}(i(y-1)) = \cos(y-1)$ et $\mathrm{sh}(i(y-1)) = i\sin(y-1)$, on obtient

$$f(z) = \mathrm{ch}\,x\cos(y-1) + i\ \mathrm{sh}\,x\sin(y-1).$$

e) $f(z) = z^{2-i} = e^{(2-i)\mathrm{Log}(z)} = e^{(2-i)(\ln(|z|)+i\arg(z))} = e^{2\ln(|z|)+\arg(z)+i(2\arg(z)-\ln(|z|))}$

$$= e^{2\ln(|z|)+\arg(z)}\left\{\cos(2\arg(z)-\ln|z|) + i\sin(2\arg(z)-\ln|z|)\right\}.$$

Puisque $\arg(z)$ peut s'écrire sous forme $\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ et $\ln(|z|) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, on trouve

$\operatorname{Re}(f(z)) = (x^2+y^2)\, e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)} \cos\left(2 \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)$ et

$\operatorname{Im}(f(z)) = (x^2+y^2)\, e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)} \sin\left(2 \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)$

Noter que $\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, et donc f est une fonction multiforme.

===

Exercice 4 : Trouver toutes les valeurs $z = x + iy$ telles que

a) $\sin z$ soit réel, **b)** $\operatorname{sh} z$ soit imaginaire pur.

Solution. **a)** D'après l'**exercice 3 b)**, $\sin z = \sin x \operatorname{ch}(y) + i \cos x \operatorname{sh}(y)$.

La fonction $\sin z$ serait réelle si sa partie imaginaire s'annule. i.e. $\cos x \operatorname{sh}(y) = 0$, ce qui est équivalent à $\cos x = 0$ ou $\operatorname{sh}(y) = 0$. D'où $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $y = 0$.

b) Tout d'abord, nous séparons les parties réelles et imaginaires de la fonction $\operatorname{sh} z$.

Nous avons $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh}(x+iy) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch}(iy) + \operatorname{ch} x \operatorname{sh}(iy) = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$.

La fonction $\operatorname{sh} z$ serait imaginaire pure si sa partie réelle s'annule. i.e. $\operatorname{sh} x \cos y = 0$, d'où $x = 0$ ou $y = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

===

Exercice 5 : Démontrer que $e^{(\operatorname{Log} z)} = z$ et montrer que

l'égalité $\operatorname{Log}(e^z) = z$ n'est pas toujours vérifiée.

Solution. Soit z un nombre complexe, nous avons

$$\begin{aligned} e^{(\operatorname{Log} z)} &= e^{\ln(|z|) + i \arg(z)} = e^{\ln(|z|)} \{\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z))\} \\ &= |z| \{\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z))\}. \end{aligned}$$

La dernière formule est exactement l'écriture du nombre complexe z sous forme trigonométrique, i.e. $|z| \{\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z))\} = z$, d'où $\operatorname{Log}(e^z) = z$.

En ce qui concerne la deuxième partie de l'exercice, par exemple dans le cas de la détermination principale, si nous prenons $z = 4i\pi$, nous obtiendrons $\operatorname{Log}(e^z) = \operatorname{Log}(e^{4i\pi}) = \operatorname{Log}(1) = 0$ ce qui est différent de $4i\pi$.

===

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $\sin z = \frac{4}{3}i$, **b)** $\operatorname{sh} z = \frac{i}{2}$, **c)** $e^z = -2$, **d)** $e^z = 1 + i\sqrt{3}$.

Solution. **a)** D'après l'**exercice 3 b)**, $\sin z = \sin x \operatorname{ch}(y) + i \cos x \operatorname{sh}(y)$. Alors $\sin z = \dfrac{4}{3}i$ entraîne $\sin x \operatorname{ch}(y) = 0$ et $\cos x \operatorname{sh}(y) = \dfrac{4}{3}$. Puisque $\operatorname{ch}(y) \geq 1$, on aura $\sin x = 0$ ou $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant dans la deuxième équation on obtient $\cos(k\pi) \operatorname{sh}(y) = \dfrac{4}{3}$ ou $\operatorname{sh}(y) = \dfrac{4}{3\cos(k\pi)} = \dfrac{4}{3(-1)^k}$, d'où $y = \operatorname{Argsh}\left(\dfrac{4}{3\,(-1)^k}\right) = (-1)^k \operatorname{Argsh}\left(\dfrac{4}{3}\right)$, et donc les racines cherchés sont

$$z_k = k\pi + i\,(-1)^k \operatorname{Argsh}\left(\frac{4}{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) D'après l'**exercice 4 b)**, $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$. Donc l'équation $\operatorname{sh} z = \dfrac{i}{2}$ est équivalente à $\operatorname{sh} x \cos y = 0$ et $\operatorname{ch} x \sin y = \dfrac{1}{2}$.

Si $\operatorname{sh} x = 0$ ou $x = 0$, on aura $\sin y = \dfrac{1}{2}$ ou $\left\{ y = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } y = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Si $\cos y = 0$ ou $y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on obtient $\operatorname{ch} x \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k \operatorname{ch} x = \dfrac{1}{2}$ ou $\operatorname{ch} x = \dfrac{(-1)^k}{2}$ et ceci n'est pas possible car $\operatorname{ch} x \geq 1$.

Alors, les racines de l'équation $\operatorname{sh} z = \dfrac{i}{2}$ sont $z_k = i\left(\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$ ou $z_k = i\left(\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

c) Si $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y = -2$, alors $e^x \cos y = -2$ et $e^x \sin y = 0$.

Puisque $e^x > 0$, on aura $\sin y = 0$ ou $y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Donc la première équation devient

$$e^x \cos(k\pi) = -2 \text{ ou } e^x = \frac{-2}{\cos(k\pi)} = \frac{-2}{(-1)^k} = 2\,(-1)^{k+1}.$$

Ceci est possible seulement si $k+1$ est un nombre pair. Dans ce cas $x = \ln 2$. Alors les racines de l'équation $e^z = -2$ sont $z_k = \ln 2 + i\,(1+2k)\,\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) Si $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y = 1 + i\sqrt{3}$, alors $e^x \cos y = 1$ et $e^x \sin y = \sqrt{3}$. En élevant au carré ces deux équations et en les additionnant membre à membre, on obtient $e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\sin^2 y = 1^2 + \sqrt{3}^2$.

Il vient alors $e^{2x} = 4$ ou $x = \ln 2$, et donc $\cos y = \dfrac{1}{2}$ et $\sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D'où $y_k = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Finalement, les racines de l'équation $e^z = 1 + i\sqrt{3}$ sont $z_k = \ln 2 + i\left(\dfrac{1}{3} + 2k\right)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

==

Exercice 7 : Calculer **a)** i^i, **b)** $(1-i)^{3-3i}$, **c)** $\operatorname{Log}(1+i)$.

Solution. a) $i^i = e^{i \operatorname{Log} i} = e^{i(\ln|i| + i \arg i)} = e^{i\left(\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}, k \in \mathbb{Z}$.

b)
$$\begin{aligned}(1-i)^{3-3i} &= e^{(3-3i)\operatorname{Log}(1-i)} = e^{(3-3i)\{\ln(|1-i|) + i\arg(1-i)\}} \\ &= e^{(3-3i)\left\{\ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right\}} = e^{3\ln\sqrt{2} + 3\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + 3i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi - \ln\sqrt{2}\right)} \\ &= 2^{\frac{3}{2}} e^{3\left(-\frac{1}{4} + 2k\right)\pi} \left\{\cos\left(3\left(-\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi - \ln\sqrt{2}\right)\right) + i \sin\left(3\left(-\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi - \ln\sqrt{2}\right)\right)\right\} \\ &= 2\sqrt{2} e^{3\left(-\frac{1}{4} + 2k\right)\pi} \left\{\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi + 3\ln\sqrt{2}\right) - i\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi + 3\ln\sqrt{2}\right)\right\}, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

c) $\operatorname{Log}(1+i) = \ln(|1+i|) + i\arg(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

==

Exercice 8 : Soit $f(z) = z^2$, en utilisant la définition de la limite, montrer que

$$\lim_{z \to i} f(z) = -1.$$

Solution. On doit montrer que $\varepsilon > 0$ étant donné on peut trouver δ (dépendant en général de ε) tel que $|z^2 - (-1)| < \varepsilon$ pourvu que $0 < |z-i| < \delta$.

Si $\delta \leq 1$, alors $0 < |z-i| < \delta$ implique que

$$\left|z^2 - (-1)\right| = \left|z^2 - i^2\right| = |z-i|\,|z+i| < \delta\,|z-i+2i| < \delta\,(|z-i| + |2i|) < \delta\,(1+2) = 3\delta.$$

Choisissant δ comme étant le plus petit de 1 et $\dfrac{\varepsilon}{3}$ i.e. $\delta \leq \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{3}\right)$, nous avons alors $|z^2 - (-1)| < \varepsilon$ dès que $|z-i| < \delta$, ce qui établit le résultat demandé.

==

Exercice 9 : Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{z \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\operatorname{ch}(iz) + i\,\operatorname{sh}(iz)}$, **b)** $\displaystyle\lim_{z \to -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z}+1}{e^z + i}$.

Solution. a) $\displaystyle\lim_{z \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\operatorname{ch}(iz) + i\,\operatorname{sh}(iz)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(i\frac{\pi}{4}\right) + i\,\operatorname{sh}\left(i\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{0}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{0}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{0}{0}$ forme indéterminée.

Donc on doit trouver un moyen pour enlever l'indétermination, pour cela on va remplacer $\operatorname{ch}(iz)$ par $\cos z$ et $i\,\operatorname{sh}(iz)$ par $-\sin z$. On obtient

$$\begin{aligned}\lim_{z \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\operatorname{ch}(iz) + i\,\operatorname{sh}(iz)} &= \lim_{z \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\cos z - \sin z} = \lim_{z \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{\cos z - \sin z} \\ &= \lim_{z \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos z - \sin z)(\cos z + \sin z)}{\cos z - \sin z} = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\lim_{z \to -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z}+1}{e^z + i} = \frac{e^{-i\pi}+1}{e^{-i\frac{\pi}{2}} + i} = \frac{-1+1}{-i+i} = \frac{0}{0}$ forme indéterminée.

Par décomposition de numérateur $e^{2z} + 1 = (e^z)^2 - i^2 = (e^z - i)(e^z + i)$ nous voyons que

$$\lim_{z \to -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z}+1}{e^z + i} = \lim_{z \to -i\frac{\pi}{2}} \frac{(e^z - i)(e^z + i)}{e^z + i} = e^{-i\frac{\pi}{2}} - i = -2i.$$

==

Exercice 10 : Montrer que $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}}{z}$ n'existe pas.

Solution. Si la limite existait elle serait indépendante de la façon dont z tend vers 0.

Si $z \to 0$ le long de l'axe des x, alors $y = 0$ et $z = x + iy = x$, $\overline{z} = x - iy = x$; la limite cherchée est donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$.

Si $z \to 0$ le long de l'axe des y, alors $x = 0$ et $z = x + iy = iy$, $\overline{z} = x - iy = -iy$; la limite cherchée est $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{-iy}{iy} = -1$.

Les deux expressions étant différentes, dépendant de la façon dont $z \to 0$, il n'y a pas de limite.

==