Série d'exercices N° 2 : Fonctions élémentaires

Exercice 1 : Démontrer les relations suivantes :

a) $|\sin z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}$, b) $|\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$,

c) $|\operatorname{sh} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y}$, d) $|\operatorname{ch} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \sin^2 y}$.

Exercice 2 : Vérifier que si $z_0 = \pi + i \operatorname{Log}(2 + \sqrt{5})$, alors $|\sin z_0| = 2$.

Exercice 3 : Séparer les parties réelles et imaginaires des fonctions suivantes :

a) $f(z) = e^{-z}$, b) $f(z) = \sin z$, c) $f(z) = 2^{z^2}$, d) $f(z) = \operatorname{ch}(z - i)$, e) $f(z) = z^{2-i}$.

Exercice 4 : Trouver toutes les valeurs $z = x + iy$ telles que

i) $\sin z$ soit réel, ii) $\operatorname{sh} z$ soit imaginaire pur.

Exercice 5 : Démontrer que $e^{(\operatorname{Log} z)} = z$ et montrer que

l'égalité $\operatorname{Log}(e^z) = z$ n'est pas toujours vérifiée.

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $\sin z = \frac{4}{3}i$, b) $\operatorname{sh} z = \frac{i}{2}$, c) $e^z = -2$, d) $e^z = 1 + i\sqrt{3}$.

Exercice 7 : Calculer i^i , $(1 - i)^{3-3i}$, $\operatorname{Log}(1 + i)$.

Exercice 8 : Soit $f(z) = z^2$, en utilisant la définition de la limite, montrer que

$$\lim_{z \rightarrow i} f(z) = -1.$$

Exercice 9 : Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\operatorname{ch}(iz) + i \operatorname{sh}(iz)}$, b) $\lim_{z \rightarrow -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z}}{e^z + i}$.

Exercice 10 : Montrer que la limite $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ n'existe pas.