U.S.T.H.B. 2011-2012 Semestre 2 — **Math 4 : Analyse complexe**

Faculté de Mathématiques — **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section C**

Série d'exercices N° 3 : Dérivation dans $\mathbb{C}$ - Équations de Cauchy Riemann

==

Exercice 1 : À l'aide de la définition calculer la dérivée de $f(z) = z^2 - z$.

Solution. Par définition, la dérivée en z_0 si elle existe est

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z\to z_0} \frac{z^2 - z - (z_0^2 - z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z^2 - z_0^2 - (z - z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z\to z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0) - (z - z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0 - 1)}{z - z_0} = 2z_0 - 1.\end{aligned}$$

La limite existe pour tout z_0 dans $\mathbb{C}$, donc la dérivée de f est donne par $f'(z) = 2z - 1$, $z \in \mathbb{C}$.

==

Exercice 2 : Montrer que la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ et $f'(z) = -\dfrac{1}{z^2}$.

Solution. On utilise la définition pour montrer que la dérivée existe en $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Soit z_0 dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Nous avons

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\frac{z_0 - z}{zz_0}}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z_0 - z}{(z - z_0)\, zz_0} = \lim_{z\to z_0} -\frac{1}{zz_0} = -\frac{1}{z_0^2}.$$

La limite existe, la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z}$ est donc holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ et $f'(z) = -\dfrac{1}{z^2}$.

==

Exercice 3 : Montrer que les fonctions complexes suivantes ne sont pas dérivables aux points indiqués.

a) $f(z) = \overline{z}$, pour $z \in \mathbb{C}$ **b)** $f(z) = \operatorname{Re}(z)$, pour $z \in \mathbb{C}$, **c)** $f(z) = \operatorname{Im}(z)$, pour $z \in \mathbb{C}$.

Solution. Par définition, la fonction f n'est pas dérivable en z_0 si la limite $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ n'existe pas, i.e. la limite dépend de la manière dont z tend vers z_0.

a) Si $z = x + iy$, $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0} = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \dfrac{x - iy - (x_0 - iy_0)}{x + iy - (x_0 + iy_0)}$.

Pour $y = y_0$ et $x \to x_0$, la limite cherchée est $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1$.

Pour $x = x_0$ et $y \to y_0$, la limite cherchée est $\lim\limits_{y\to y_0} \dfrac{-iy + iy_0}{iy - iy_0} = \lim\limits_{y\to y_0} \dfrac{-i(y - y_0)}{i(y - y_0)} = -1$.

La limite obtenue dépendant de la façon dont $z \to z_0$, la dérivée n'existe pas i.e. la fonction f n'est dérivable en aucun point.

b) $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \dfrac{x - x_0}{x + iy - (x_0 + iy_0)}$.

Si $y = y_0$ et $x \to x_0$, la limite est $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1$.

Si $x = x_0$ et $y \to y_0$, la limite est $\lim\limits_{y\to y_0} \dfrac{0}{iy - iy_0} = 0$.

c) $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \dfrac{y - y_0}{x + iy - (x_0 + iy_0)}$.

Si $y = y_0$ et $x \to x_0$, la limite est $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{0}{x - x_0} = 0$.

Si $x = x_0$ et $y \to y_0$, la limite est $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{y - y_0}{iy - iy_0} = \dfrac{1}{i} = -i$.

==

Exercice 4 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f(z) = \frac{xy^2(x + iy)}{x^2 + y^4} \text{ si } z \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Montrer que $f'(0)$ n'existe pas.

Solution. Par définition, $f'(0) = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\dfrac{xy^2(x + iy)}{x^2 + y^4} - 0}{(x + iy) - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ si la limite existe.

Nous devons montrer que la limite n'existe pas. Il suffit de trouver deux limites différentes de f le long deux chemins différents.

Si $x = 0$ ($y = t \to 0$), la limite cherchée est $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{0t^2}{0^2 + t^4} = 0$.

Si $x = t^2$ et $y = t$ (le long d'une parabole $x = y^2$), la limite est $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t^2 t^2}{(t^2)^2 + t^4} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t^4}{2t^4} = \dfrac{1}{2}$.

Alors, la limite $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f(z) - f(0)}{z - 0}$ n'existe pas et donc $f'(0)$ n'existe pas.

==

Exercice 5 : Examiner si les fonctions suivantes sont holomorphes sur le domaine indiqué.

a) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \sin y)$, sur $\mathbb{C}$, **b)** $f(z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{y}{x^2 + y^2}$, sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$,

c) $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$, sur $\mathbb{C}$, **d)** $f(z) = (x^2 - y^2 - 2xy) + i(x^2 - y^2 + 2xy)$, sur $\mathbb{C}$.

Solution. Si les dérivées partielles sont continues dans le domaine indiqué, les équations de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ sont nécessaires et suffisantes pour que $f = u + iv$ soit holomorphe.

a) $u = e^{-y} \cos x$ et $v = e^{-y} \sin y$. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y} \sin x$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -e^{-y} \sin y + e^{-y} \cos y$. Il est claire que $\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}$, la première équation de Cauchy-Riemann n'est pas satisfaite. Alors la fonction f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

b) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $v = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$.
Pour la même raison que celle qui précède f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

c) $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y$.

Les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites, la fonction f est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$.

d) $u = x^2 - y^2 - 2xy$, $v = x^2 - y^2 + 2xy$.

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -2y + 2x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y - 2x$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2y$.

Les équations de Cauchy-Riemann sont ainsi satisfaites et la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

==

Exercice 6 : **a)** Montrer que la fonction u définie ci-dessous est harmonique.

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y, \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Trouver une fonction v pour que la fonction $f = u + iv$ soit holomorphe.

b) Mêmes questions pour la fonction

$$u(x, y) = y \cos y \text{ ch } x + x \sin y \text{ sh } x, \ \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Solution. a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y - 2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y - 2x + 3$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$.

On obtient $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$, ce qui montre que u est harmonique.

Pour trouver une fonction v pour que $f = u + iv$ soit holomorphe, on utilise les équations de Cauchy-Riemann.

Les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y - 2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2x - 3. \tag{2}$$

En intégrant l'équation (1) par rapport à y, il vient

$$v = 2xy - y^2 - 2y + C_1(x), \tag{3}$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x.

Par substitution de (3) dans (2) on obtient

$$2y + \frac{d}{dx} C_1(x) = 2y + 2x - 3 \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dx} C_1(x) = 2x - 3 \quad \longrightarrow \quad C_1(x) = x^2 - 3x + c,$$

où c désigne une constante. D'où de (3)

$$v = 2xy - y^2 - 2y + x^2 - 3x + c.$$

b) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y \cos y \text{ sh } x + \sin y \text{ sh } x + x \sin y \text{ ch } x = (y \cos y + \sin y) \text{ sh } x + x \sin y \text{ ch } x$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (y \cos y + \sin y) \text{ ch } x + \sin y \text{ ch } x + x \sin y \text{ sh } x = (y \cos y + 2 \sin y) \text{ ch } x + x \sin y \text{ sh } x. \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos y \text{ ch } x - y \sin y \text{ ch } x + x \cos y \text{ sh } x = (\cos y - y \sin y) \text{ ch } x + x \cos y \text{ sh } x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (-\sin y - \sin y - y \cos y) \text{ ch } x - x \sin y \text{ sh } x, \tag{5}$$

Par addition de (4) et (5) on obtient $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, la fonction u est donc harmonique.

Les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = (y \cos y + \sin y) \text{ sh } x + x \sin y \text{ ch } x, \tag{6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = (-\cos y + y \sin y) \text{ ch } x - x \cos y \text{ sh } x. \tag{7}$$

En intégrant (par parties) l'équation (6) par rapport à y, il vient

$$v = (y \sin y + \cos y - \cos y) \text{ sh } x - x \cos y \text{ ch } x + C_1(x) = y \sin y \text{ sh } x - x \cos y \text{ ch } x + C_1(x) . \quad (8)$$

Par substitution de (8) dans (7) on obtient

$$y \sin y \text{ ch } x - \cos y \text{ ch } x - x \cos y \text{ sh } x + \frac{d}{dx} C_1(x) = (-\cos y + y \sin y) \text{ ch } x - x \cos y \text{ sh } x$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} C_1(x) = 0 \quad \rightarrow C_1(x) = c, \text{ où } c \text{ désigne une constante.}$$

D'où de (8) on obtient

$$v = y \sin y \text{ sh } x - x \cos y \text{ ch } x + c.$$

==

Exercice 7 : Quelle est la nature des singularités de chacune des fonctions suivantes?

a) $f(z) = \dfrac{z+3}{z^2-1}$, **b)** $g(z) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)}$.

Solution. a) Nous avons $f(z) = \dfrac{z+3}{z^2-1} = \dfrac{z+3}{(z-1)(z+1)}$, puisque $\lim\limits_{z\to 1}(z-1) f(z) = \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{z+3}{(z+1)} = 2 \neq 0$, le point $z = 1$ est un pôle simple.

De même $z = -1$ est aussi un pôle simple à cause de $\lim\limits_{z\to -1}(z+1) f(z) = \lim\limits_{z\to -1} \dfrac{z+3}{(z-1)} = -1 \neq 0$.

Nous pouvons déterminer δ tel qu'il n'existe pas d'autre singularité que $z = 1$ dans le cercle $|z-1| = \delta$, il suffit de choisir $\delta = 1$, on en déduit que $z = 1$ est pont singulier isolé. De la même façon $z = -1$ est aussi un point singulier isolé.

b) On obtient des singularités pour $\sin\left(\frac{1}{z^2}\right) = 0$, i.e. $\dfrac{1}{z^2} = k\pi$ ou $z = \pm \dfrac{1}{\sqrt{k\pi}}, k \in \mathbb{Z}^*$. De plus comme $g(z)$ n'est pas définie pour $z = 0$, ce point est aussi une singularité. De même, puisque $z = 0$ est une singularité de $g\left(\frac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{\sin(z^2)}$, $z = \infty$ est une singularité de $g(z)$.

Décrivons maintenant la nature de ces singularités. En utilisant la règle de L'Hôpital

$$\lim_{z\to \frac{1}{\sqrt{k\pi}}} \left(z - \frac{1}{\sqrt{k\pi}}\right) g(z) = \lim_{z\to \frac{1}{\sqrt{k\pi}}} \frac{z - \frac{1}{\sqrt{k\pi}}}{\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \lim_{z\to \frac{1}{\sqrt{k\pi}}} \frac{1}{\frac{-2}{z^3}\cos\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{-1}{2k\pi\sqrt{k\pi}\cos(k\pi)} \neq 0$$

et

$$\lim_{z\to \frac{-1}{\sqrt{k\pi}}} \left(z + \frac{1}{\sqrt{k\pi}}\right) g(z) = \lim_{z\to \frac{-1}{\sqrt{k\pi}}} \frac{z + \frac{1}{\sqrt{k\pi}}}{\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \lim_{z\to \frac{-1}{\sqrt{k\pi}}} \frac{1}{\frac{-2}{z^3}\cos\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{-1}{2k\pi\sqrt{k\pi}\cos(k\pi)} \neq 0.$$

Les singularités $z = \pm \dfrac{1}{\sqrt{k\pi}}, k \in \mathbb{Z}^*$ sont donc des pôles simples. Comme nous pouvons entourer chacune de ces singularités par un cercle de rayon δ_k n'en contenant pas d'autre, on en déduit qu'elles sont isolées.

Etant donné que l'on ne peut pas trouver d'entier n tel que $\lim\limits_{z\to 0}(z-0)^n g(z) = A \neq 0$, on en déduit que $z = 0$ est une singularité essentielle. De plus comme tout cercle de rayon δ centré en $z = 0$ contient d'autres singularités que $z = 0$, on en déduit que $z = 0$ est une singularité non isolée.

==