U.S.T.H.B. 2011-2012 Semestre 2 **Math 4 : Analyse complexe**

Faculté de Mathématiques **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section C**

Série d'exercices N° 3 : Dérivation dans $\mathbb{C}$ - Équations de Cauchy Riemann

Exercice 1 : À l'aide de la définition calculer la dérivée de $f(z) = z^2 - z$.

Exercice 2 : Montrer que la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et vérifie

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2}.$$

Exercice 3 : Montrer que les fonctions complexes suivantes ne sont pas dérivables aux points indiqués.

a) $f(z) = \overline{z}$, pour $z \in \mathbb{C}$ **b)** $f(z) = \operatorname{Re}(z)$, pour $z \in \mathbb{C}$, **c)** $f(z) = \operatorname{Im}(z)$, pour $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 4 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f(z) = \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^2} \text{ si } z \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Montrer que $f(0)$ n'existe pas et déduire que f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Exercice 5 : Examiner si les fonctions suivantes sont holomorphes sur le domaine indiqué.

a) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \sin y)$, sur $\mathbb{C}$, **b)** $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{y}{x^2+y^2}$, sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$,

c) $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$, sur $\mathbb{C}$, **d)** $f(z) = (x^2 - y^2 - 2xy) + i(x^2 - y^2 + 2xy)$, sur $\mathbb{C}$.

Exercice 6 : Montrer que la fonction u définie ci-dessous est harmonique.

$$u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y, \; x, y \in \mathbb{R}.$$

Trouver une fonction v pour que la fonction $f = u + iv$ soit holomorphe.

Mêmes questions pour la fonction

$$u(x,y) = y \cos y \text{ ch } x + x \sin y \text{ ch } x, \; x, y \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7 : Quelle est la nature des singularités de chacune des fonctions suivantes?

a) $\dfrac{z+3}{z^2-1}$, **b)** $\dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)}$.