

Série d'exercices N° 4 : Intégration dans $\mathbb{C}$ - Théorème de Cauchy

Exercice 1 :

Calculer $\int_{(0,3)}^{(2,4)} (2y + x^2) dx + (3x - y) dy$ le long de

- a) la parabole $x = 2t$, $y = t^2 + 3$,
- b) la ligne brisée formée par les segments de droite $(0, 3)$ à $(2, 3)$ et $(2, 3)$ à $(2, 4)$,
- c) le segment de droite d'extrémités $(0, 3)$ et $(2, 4)$.

Solution. a) Les points $(0, 3)$ et $(2, 4)$ de la parabole correspondent respectivement à $t = 0$ et $t = 1$.
L'intégrale donnée a alors pour valeur

$$\int_{t=0}^1 \{2(t^2 + 3) + (2t)^2\} 2dt + \{3(2t) - (t^2 + 3)\} 2tdt = \int_0^1 (24t^2 + 12 - 2t^3 - 6t) dt = \frac{33}{2}.$$

b) Le long du segment de droite d'extrémités $(0, 3)$ et $(2, 3)$, $y = 3$, $dy = 0$ et l'intégrale curviligne vaut

$$\int_{x=0}^2 (6 + x^2) dx + (3x - 3) 0 = \int_0^2 (6 + x^2) dx = \frac{44}{3}.$$

Le long du segment de droite d'extrémités $(2, 3)$ et $(2, 4)$, $x = 2$, $dx = 0$ et l'intégrale curviligne vaut

$$\int_{y=3}^4 (2y + 4) 0 + (6 - y) dy = \int_3^4 (6 - y) dy = \frac{5}{2}.$$

Le résultat demandé est donc $\frac{44}{3} + \frac{5}{2} = \frac{103}{6}$.

c) Une équation de la droite joignant $(0, 3)$ à $(2, 4)$ est $2y - x = 6$. On en tire $x = 2y - 6$. D'où la valeur de l'intégrale curviligne

$$\int_{y=3}^4 \{2y + (2y - 6)^2\} 2dy + \{3(2y - 6) - y\} dy = \int_3^4 (8y^2 - 39y + 54) dy = \frac{97}{6}$$

Ce résultat peut aussi être obtenu en utilisant $y = \frac{1}{2}(x + 6)$.

Exercice 2 :

Évaluer $\int_C \bar{z} dz$ de $z = 0$ à $z = 4 + 2i$ le long de la courbe C dans les cas suivants.

- a) la courbe C définie par $z = t^2 + it$,
- b) la courbe C formée des segments joignant 0 à $2i$ et $2i$ à $4 + 2i$.

Solution. a) Les points $z = 0$ et $z = 4 + 2i$ sur C correspondant à $t = 0$ et à $t = 2$. L'intégrale curviligne considérée vaut donc

$$\int_{t=0}^2 \overline{(t^2 + it)} d(t^2 + it) = \int_0^2 (t^2 - it)(2t + i) dt = \int_0^2 (2t^3 - it^2 + t) dt = 10 - \frac{8}{3}i.$$

Autre méthode. L'intégrale donnée s'écrit

$$\int_C (x - iy)(dx + idy) = \int_C xdx + ydy + i \int_C xdy - ydx$$

Les équations paramétriques de C sont $x = t^2$, $y = t$ de $t = 0$ à $t = 2$; l'intégrale curviligne a donc pour valeur

$$\int_{t=0}^2 (t^2)(2tdt) + (t)(dt) + i \int_{t=0}^2 (t^2)(dt) - (t)(2tdt) = \int_0^2 (2t^3 + t) dt + i \int_0^2 (-t^2) dt = 10 - \frac{8}{3}i.$$

b) L'intégrale donnée vaut

$$\int_C (x - iy)(dx + idy) = \int_C xdx + ydy + i \int_C xdy - ydx$$

La droite qui joint 0 à $2i$ joint les points $(0, 0)$ et $(0, 2)$, on a donc sur cette droite $x = 0$, $dx = 0$ et la valeur de l'intégrale est

$$\int_{y=0}^2 (0)(0) + ydy + i \int_{y=0}^2 (0)(dy) - y(0) = \int_{y=0}^2 ydy = 2.$$

Sur le segment de droite $2i$, $4 + 2i$ on a $y = 2$, $dy = 0$, d'où

$$\int_{x=0}^4 xdx + (2)(0) + i \int_{x=0}^4 (x)(0) - 2dx = \int_0^4 xdx + i \int_0^4 (-2) dx = 8 - 8i.$$

Et le résultat demandé est $= 2 + (8 - 8i) = 10 - 8i$.

Exercice 3 :

Vérifier la formule de Green pour l'intégrale

$$\oint_C (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy,$$

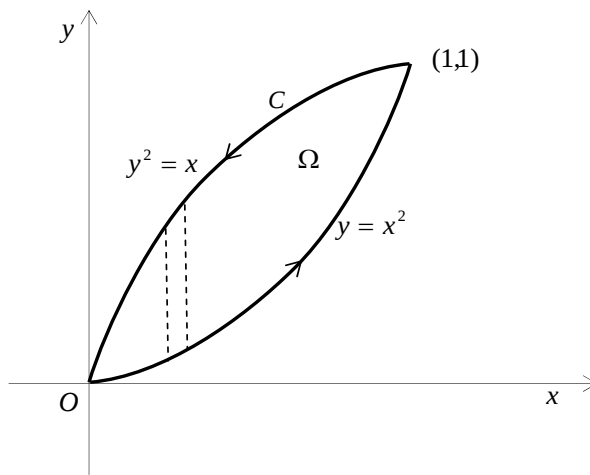
où C est la frontière du domaine compris entre les courbes $y = x^2$ et $y^2 = x$.

Solution. Les courbes $y = x^2$ et $y^2 = x$ se coupent en $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

Le sens direct sur C est indiqué à la figure ci-dessous.

Sur $y = x^2$, l'intégrale curviligne a pour valeur

$$\int_{x=0}^1 \{(2x)(x^2) - x^2\} dx + \{x + (x^2)^2\} d(x^2) = \int_0^1 (2x^3 + x^2 + 2x^5) dx = \frac{7}{6}.$$



Sur $y^2 = x$, l'intégrale curviligne a pour valeur

$$\int_{y=1}^0 \left\{ 2(y^2)(y) - (y^2)^2 \right\} d(y^2) + \{y^2 + y^2\} dy = \int_1^0 (4y^4 - 2y^5 + 2y^2) dy = \frac{-17}{15}.$$

D'où la valeur de l'intégrale considérée $= \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}$.

D'autre part

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (x + y^2) - \frac{\partial}{\partial y} (2xy - x^2) \right\} dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (1 - 2x) dx dy = \int_{x=0}^1 \left\{ \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dy \right\} dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left\{ (y - 2xy) \Big|_{y=x^2}^{\sqrt{x}} \right\} dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} - x^2 + 2x^3 \right) dx = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

La formule de Green est donc bien vérifiée.

Exercice 4 :

Évaluer les intégrales $\oint_C dz$, $\oint_C z dz$ et $\oint_C z - idz$,
où C est une courbe fermée simple.

Solution. Ce sont des conséquences du théorème de Cauchy car les fonctions 1, z et $z - i$ sont holomorphes dans C et ont des dérivées continues.

Ces résultats peuvent aussi être établis directement à partir de la définition de l'intégrale.

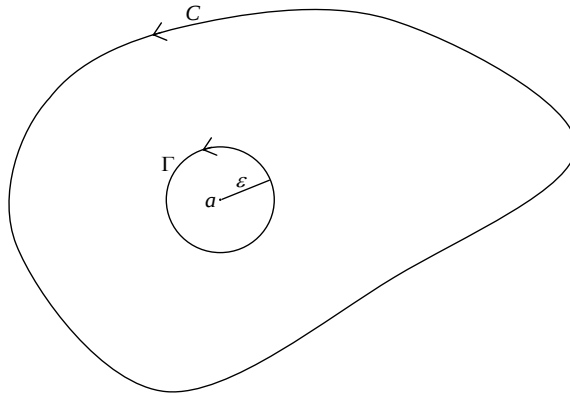
Exercice 5 :

Évaluer $\oint_C \frac{1}{z - a} dz$ où C désigne une courbe fermée et $z = a$ est
a) à l'extérieur de C , b) à l'intérieur de C .

Solution. a) Si a est à l'extérieur de C , alors $f(z) = \frac{1}{z - a}$ est holomorphe à l'intérieur de C et sur C .

Alors d'après le théorème de Cauchy $\oint_C \frac{1}{z-a} dz = 0$.

b) Supposons a intérieur à C et soit Γ un cercle de rayon ε , centré en $z = a$, tel que Γ soit à l'intérieur de C [ceci peut être réalisé car $z = a$ est un point intérieur].



D'après une conséquence du théorème de Cauchy

$$\oint_C \frac{1}{z-a} dz = \oint_{\Gamma} \frac{1}{z-a} dz. \quad (1)$$

D'autre part sur Γ , $|z-a| = \varepsilon$ ou $z-a = \varepsilon e^{i\theta}$, i.e. $z = a + \varepsilon e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. D'où tenant compte de $dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$, le deuxième membre de (1) devient

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i,$$

qui est le résultat cherché.