U.S.T.H.B. 2011-2012 Semestre 2 **Math 4 : Analyse complexe**
Faculté de Mathématiques **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section C**

Série d'exercices N° 5 : Formules intégrales de Cauchy

==

Exercice 1 :

Évaluer

a) $\oint_C \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}dz,$

b) $\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$ où C est le cercle $|z|=3$.

Solution. a) De $\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$, on tire

$$\oint_C \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}dz=\oint_C \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{z-2}dz-\oint_C \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{z-1}dz$$

L'application de la formule de Cauchy pour $a=2$ et $a=1$ donne

$$\oint_C \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{z-2}dz=2\pi i\left\{\sin\left(\pi 2^2\right)+\cos\left(\pi 2^2\right)\right\}=2\pi i,$$

$$\oint_C \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{z-1}dz=2\pi i\left\{\sin\left(\pi 1^2\right)+\cos\left(\pi 1^2\right)\right\}=-2\pi i,$$

car $z=1$ et $z=2$ sont à l'intérieur de C et $\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)$ est holomorphe dans C. L'intégrale considérée vaut donc $2\pi i-(-2\pi i)=4\pi i$.

b) Soit $f(z)=e^{2z}$ et $a=-1$, la formule intégrale de Cauchy s'écrit

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz. \tag{1}$$

Si $n=3$, alors $f'''(z)=8e^{2z}$ et $f'''(-1)=8e^{-2}$. Dans ces conditions la formule (1) devient

$$8e^{-2}=\frac{3!}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{2z}}{(z-a)^4}dz,$$

d'où l'on tire la valeur de l'intégrale considérée $\frac{8}{3}\pi i e^{-2}$.

==

Exercice 2 :

Soit f une fonction holomorphe dans un cercle C de rayon r, centré en a, et sur C. Démontrer le théorème de Gauss sur la valeur moyenne : la moyenne des valeurs de $f(z)$ sur C est $f(a)$, i.e.

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a+re^{i\theta}\right)d\theta.$$

Solution. D'après la formule intégrale de Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz. \tag{2}$$

Si C a pour rayon r, l'équation de C est $|z-a| = r$ ou $z = a + re^{i\theta}$. Donc (2) devient

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(a + re^{i\theta}\right)}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\theta}\right) d\theta,$$

qui est le résultat demandé.

==

Exercice 3 :

En utilisant la formule intégrale de Cauchy, montrer que

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{4}\pi.$$

Indication : Poser $z = e^{i\theta}$, C le cercle unité $|z| = 1$, d'où $d\theta = \frac{dz}{iz}$ et $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Solution. On pose $z = e^{i\theta}$. D'où $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$ ou $d\theta = \frac{dz}{iz}$ et $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

On a donc, si C désigne le cercle unité $|z| = 1$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta &= \oint_C \left\{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right\}^4 \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2^4 i} \oint_C \frac{1}{z}\left(z^4 + 4z^3\frac{1}{z} + 6z^2\frac{1}{z^2} + 4z\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4}\right) dz \\
&= \frac{1}{16i} \oint_C \frac{1}{z}\left(z^4 + 4z^2 + 6 + \frac{4}{z^2} + \frac{1}{z^4}\right) dz = \frac{1}{16i} \oint_C \left(z^3 + 4z + \frac{6}{z} + \frac{4}{z^3} + \frac{1}{z^5}\right) dz \\
&= \frac{1}{16i} \oint_C \left(z^3 + 4z\right) dz + \frac{3}{8i} \oint_C \frac{1}{z} dz + \frac{1}{4i} \oint_C \frac{1}{z^3} dz + \frac{1}{16i} \oint_C \frac{1}{z^5} dz.
\end{aligned}$$

La fonction $z^3 + 4z$ est holomorphe dans C, donc d'après le théorème de Cauchy $\oint_C \left(z^3 + 4z\right) dz = 0$.

Pour $f(z) = 1$ et $a = 0$, la formule intégrale de Cauchy s'écrit $f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z^{n+1}} dz$.

Si $n = 0,\ 2,\ 4$, on obtient

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i, \quad \oint_C \frac{1}{z^3} dz = 0, \quad \oint_C \frac{1}{z^5} dz = 0.$$

D'où $\int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{8i}(2\pi i) = \frac{3}{4}\pi.$

==