Série d'exercices N° 5 : Formules intégrales de Cauchy

Exercice 1 :

Évaluer

a) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}dz,$

b) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$ où C est le cercle $|z|=3$.

Exercice 2 :

Soit f une fonction holomorphe dans un cercle C de rayon r, centré en a, et sur C. Démontrer le théorème de Gauss sur la valeur moyenne : la moyenne des valeurs de $f(z)$ sur C est $f(a)$, i.e.

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a+re^{i\theta}\right)d\theta.$$

Exercice 3 :

En utilisant la formule intégrale de Cauchy, montrer que

$$\int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta=\frac{3}{4}\pi.$$

Indication : Poser $z=e^{i\theta}$, C le cercle unité $|z|=1$, d'où $d\theta=\dfrac{dz}{iz}$ et $\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$.