

Série d'exercices pour vous préparer à l'épreuve du TD (interrogation)

Exercice 1 :

- a) Déterminer toutes les valeurs de $(1+i)^i$ et $1^{\sqrt{2}}$.
b) Trouver les valeurs de $4 \operatorname{sh} \left(\frac{\pi}{3} i \right)$ et $\operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{2} i \right)$.

Exercice 2 :

Déterminer $u(x, y)$ et $v(x, y)$ telles que **a)** $\operatorname{sh}(2z) = u + iv$, **b)** $ze^z = u + iv$.

Exercice 3 :

À l'aide de la définition déterminer la dérivée de $f(z) = iz^2$ au point $z = 1 + i$.

Exercice 4 :

Examiner si les fonctions suivantes sont holomorphes dans \mathbb{C} .

- a)** $(x \cos y - y \sin y) e^x + i(x \sin y + y \cos y) e^x$, **b)** $x^2 - y^2 + x + i(2xy - y)$.

Exercice 5 :

- a)** Montrer que la fonction $u = 2x(1 - y)$ est harmonique.
b) Trouver une fonction v telle que $f(z) = u + iv$ soit holomorphe.
c) Exprimer $f(z)$ à l'aide de la variable z .

Exercice 6 :

Calculer $\oint_C (x^2 - iy^2) dz$ le long

- a)** de la parabole $y = 2x^2$ de $(1, 1)$ à $(2, 8)$,
b) des segments de droite joignant $(1, 1)$ à $(1, 8)$ et $(1, 8)$ à $(2, 8)$,
c) du segment de droite joignant $(1, 1)$ à $(2, 8)$.

Exercice 7 :

Calculer $\oint_C z^2 dz$ le long du carré de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$.

Exercice 8 :

Calculer $\oint_C (z^2 + 3z) dz$ le long

- a)** du cercle $|z| = 2$ de $(2, 0)$ à $(0, 2)$ dans le sens direct,
b) du segment de droite joignant $(2, 0)$ à $(0, 2)$,
c) du contour polygonal formé par les segments de droite joignant $(2, 0)$ à $(2, 2)$ et $(2, 2)$ à $(0, 2)$.

Exercice 9 :

Calculer $\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz$ si C désigne **(a)** le cercle $|z| = 3$, **(b)** le cercle $|z| = 1$.