

Série d'exercices pour vous préparer à l'épreuve du TD (interrogation 2)

Exercice 1 :

Développer en série de Laurent autour de leurs points singuliers les fonctions suivantes, et préciser la nature des points singuliers.

(a) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, (b) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$.

Solution. (a) La fonction $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ a une singularité en $z = 0$. Soit $\frac{1}{z} = u$. Alors

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z}} &= e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \dots \end{aligned}$$

La partie principale de la série de Laurent a une infinité de termes, donc $z = 0$ est une singularité essentielle.

(b) Les singularités de f sont $z = 1$ et $z = 2$.

· Série de Laurent autour de $z = 1$: Soit $z - 1 = u$. Alors $z = 1 + u$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{-1+u} = -\frac{1}{u} \cdot \frac{1}{1-u} \\ &= -\frac{1}{u} (1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + \dots) \\ &= -\frac{1}{u} - 1 - u - u^2 - u^3 - \dots \\ &= -\frac{1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - (z-1)^3 - \dots \end{aligned}$$

La plus grande puissance de $\frac{1}{z-1}$ est 1, la singularité en $z = 1$ est donc un pôle simple.

· Série de Laurent autour de $z = 2$: Soit $z - 2 = u$. D'où $z = 2 + u$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{2+u-1} \cdot \frac{1}{u} = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{1+u} \\ &= \frac{1}{u} (1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \dots) \\ &= \frac{1}{u} - 1 + u - u^2 + u^3 - \dots \\ &= \frac{1}{z-2} - 1 + (z-2) - (z-2)^2 + (z-2)^3 - \dots \end{aligned}$$

La singularité en $z = 2$ est un pôle simple.

=====
Exercice 2 :

Pour chacune des fonctions suivantes déterminer les pôles et les résidus en ces pôles.

$$(a) f(z) = \frac{2z+1}{z^2-z-2}, \quad (b) f(z) = \frac{\sin z}{z^2}, \quad (c) f(z) = \frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}.$$

Solution.

(a) La fonction $f(z) = \frac{2z+1}{z^2-z-2}$ possède deux pôles simple en $z = -1$ et $z = 2$ [racines de $z^2 - z - 2$].

Le résidu en $z = -1$ est

$$\lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{2z+1}{z^2-z-2} = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{2z+1}{(z+1)(z-2)} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{2z+1}{z-2} = \frac{-2+1}{-1-2} = \frac{1}{3}.$$

Le résidu en $z = 2$ est

$$\lim_{z \rightarrow 2} (z-2) \frac{2z+1}{z^2-z-2} = \lim_{z \rightarrow 2} (z-2) \frac{2z+1}{(z+1)(z-2)} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{2z+1}{z+1} = \frac{4+1}{2+1} = \frac{5}{3}.$$

(b) On a $\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\sin z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$. Le point singulier $z = 0$ est donc un pôle simple et le résidu en $z = 0$ est $\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = 1$.

(c) La fonction $\frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}$ possède trois pôles simple en $z = 0$, $z = -1+i$ et $z = -1-i$ [racines de $z^3 + 2z^2 + 2z$].

Le résidu en $z = 0$ est

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2+4}{z^2+2z+2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Remarque. Une autre méthode pour calculer les résidus des pôles simples pour le cas où $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$: $\text{Res}(f, a) = \frac{P(a)}{Q'(a)}$.

Le résidu en $z = -1+i$ est

$$\lim_{z \rightarrow -1+i} (z - (-1+i)) \frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z} \stackrel{\text{ou}}{=} \frac{P(-1+i)}{Q'(-1+i)} = \frac{(-1+i)^2+4}{3(-1+i)^2+4(-1+i)+2} = -\frac{1}{2}(1-3i).$$

Le résidu en $z = -1-i$ est

$$\lim_{z \rightarrow -1-i} (z - (-1-i)) \frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z} \stackrel{\text{ou}}{=} \frac{P(-1-i)}{Q'(-1-i)} = \frac{(-1-i)^2+4}{3(-1-i)^2+4(-1-i)+2} = -\frac{1}{2}(1+3i).$$

=====
Exercice 3 :

Appliquer le théorème des résidus pour calculer $\oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z+4)} dz$ où C est le rectangle des sommets $2, 2+2i, 2i-2$ et -2 .

Solution.

La fonction à intégrer $\frac{1}{(z^2 + 1)(z + 4)}$ possède trois pôles simples en $z = i$, $z = -i$ et $z = -4$ [racines de $(z^2 + 1)(z + 4)$]. Le seul pôle intérieur à C est $z = i$.

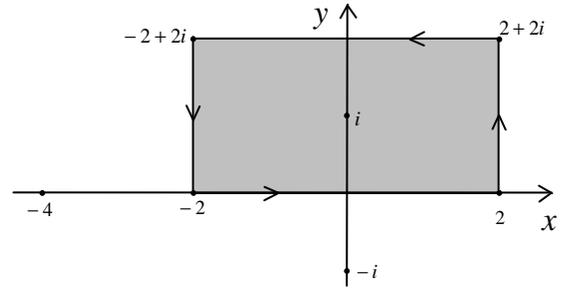


Figure 1.

Le résidu en $z = i$ est

$$\lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 4)} = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{1}{(z - i)(z + i)(z + 4)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z + i)(z + 4)} = \frac{-1 - 4i}{34}.$$

On a alors par le théorème des résidus

$$\oint_C \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 4)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i \left(\frac{-1 - 4i}{34} \right) = \frac{\pi}{17} (4 - i).$$

Exercice 4 :

Calculer $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz$ où C désigne le contour fermé de la figure ci-contre formé du segment, $[-R, +R]$ et du demi cercle Γ décrit dans le sens direct.

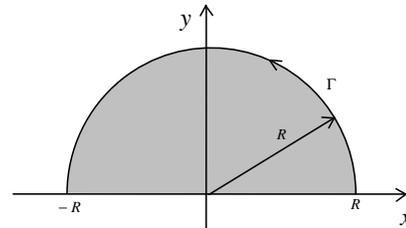


Figure 2.

En déduire $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$.

Solution.

La fonction à intégrer $\frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$ possède deux pôles simples en $z = i$ et $z = -i$ [racines de $z^2 + 1$]. Le seul pôle intérieur à C est $z = i$, et le résidu en $z = i$ est $\lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{e^{iz}}{(z - i)(z + i)} = \frac{e^{-1}}{2i}$. Par application du théorème des résidus

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

Cette intégrale peut être partagée en $\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz = \frac{\pi}{e}$. Si l'on prend la limite quand $R \rightarrow \infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{iR e^{i\theta}}}{R^2 e^{2i\theta} + 1} R i e^{i\theta} d\theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{-R \sin \theta} e^{iR \cos \theta}}{R^2 e^{2i\theta} + 1} R i e^{i\theta} d\theta = 0,$$

on obtient $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{e}$.

D'où $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{e}$.

Exercice 5 :

Calculer $\oint_C \frac{1}{(z^2 + 1)^2} dz$ où C est le contour de l'exercice 4, voir Figure 2 ci-dessus.

En déduire $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$.

Solution.

La fonction $\frac{1}{(z^2 + 1)^2}$ possède deux pôles doubles en $z = i$ et $z = -i$ [racines de $(z^2 + 1)^2$].

Le seul pôle intérieur à C est $z = i$, et le résidu en $z = i$ est

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} (z - i)^2 \frac{1}{(z^2 + 1)^2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z + i)^2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{-2}{(z + i)^3} = \frac{1}{4i} = \frac{-i}{4}.$$

On a alors par le théorème des résidus

$$\oint_C \frac{1}{(z^2 + 1)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

Cette intégrale peut s'écrire sous la forme

$$\int_{-R}^R \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx + \int_{\Gamma} \frac{1}{(z^2 + 1)^2} dz = \frac{\pi}{2}$$

ou

$$\int_{-R}^R \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx + \int_0^{\pi} \frac{1}{(R^2 e^{2i\theta} + 1)^2} R i e^{i\theta} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

En prenant la limite de ces expressions quand $R \rightarrow \infty$ et en remarquant que la deuxième intégrale tend vers 0

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{(R^2 e^{2i\theta} + 1)^2} R i e^{i\theta} d\theta = 0$$

nous obtenons le résultat demandé. i.e.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 6 :

Calculer (a) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{4 + \sin \theta} d\theta$, (b) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta$.

Solution. Soit C est le cercle de rayon 1 centré à l'origine. Soit $z = e^{i\theta}$. D'où $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$, $dz = izd\theta$ et alors

(a)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{4 + \sin \theta} d\theta = \oint_C \frac{\frac{z + z^{-1}}{2}}{4 + \frac{z - z^{-1}}{2i}} \frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 8iz - 1)} dz.$$

La fonction à intégrer $\frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 8iz - 1)}$ possède trois pôles simples en $z = 0$, $z = (-4 + \sqrt{15})i$ et $z = (-4 - \sqrt{15})i$ [racines de $z(z^2 + 8iz - 1)$]. Les pôles intérieur à C sont $z = 0$ et $z = (-4 + \sqrt{15})i$.

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 8iz - 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 1}{z^2 + 8iz - 1} = -1$$

et

$$\text{Res}\left(f, (-4 + \sqrt{15})i\right) = \lim_{z \rightarrow (-4 + \sqrt{15})i} \left(z - (-4 + \sqrt{15})i\right) \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 8iz - 1)} = 1.$$

Par application du théorème des résidus

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{4 + \sin \theta} d\theta = \oint_C \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 8iz - 1)} dz = 2\pi i \left\{ \text{Res}(f, 0) + \text{Res}\left(f, (-4 + \sqrt{15})i\right) \right\} = 2\pi i (-1 + 1) = 0.$$

(b) Si $z = e^{i\theta}$ alors $z^3 = e^{3i\theta}$, $z^{-3} = e^{-3i\theta}$ et donc $\cos 3\theta = \frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{2} = \frac{z^3 + z^{-3}}{2}$. D'où

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta = \oint_C \frac{\frac{z^3 + z^{-3}}{2}}{5 - 4 \frac{z + z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{\frac{z^3 + z^{-3}}{2}}{5 - 2 \frac{z + z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{i(z^6 + 1)}{2z^3(2z^2 - 5z + 2)} dz.$$

La fonction à intégrer $\frac{i(z^6 + 1)}{2z^3(2z^2 - 5z + 2)}$ possède deux pôles simples en $z = 2$ et $z = \frac{1}{2}$; et un pôle triple en $z = 0$ [racines de $z^3(2z^2 - 5z + 2)$]. Les pôles intérieur à C sont $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}$.

$$\text{Res}\left(f, \frac{1}{2}\right) = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2}\right) \frac{i(z^6 + 1)}{2z^3(2z^2 - 5z + 2)} = \frac{-65}{48}i$$

et

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} z^3 \frac{i(z^6 + 1)}{2z^3(2z^2 - 5z + 2)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{i}{4} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{z^6 + 1}{2z^2 - 5z + 2} \right) = \frac{21}{16}i.$$

On a alors par le théorème des résidus

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta = \oint_C \frac{i(z^6 + 1)}{2z^3(2z^2 - 5z + 2)} dz = 2\pi i \left\{ \text{Res}\left(f, \frac{1}{2}\right) + \text{Res}(f, 0) \right\} = 2\pi i \left(\frac{-65}{48}i + \frac{21}{16}i \right) = \frac{\pi}{12}.$$