Épreuve de TD (interrogation 2) - 15 mai 2012. Durée : 30 minutes

Nom :.. **Matricule :**.. **Forme A**

Prénom :.. **Groupe :**..

==

Exercice 1 (8 points) : a) Développer en série de Laurent autour de son point singulier $f(z) = \frac{1}{z^2}e^{\frac{1}{z}}$.

b) Préciser la nature de son point singulier.

c) En déduire le résidu de $f(z)$ en ce point singulier.

Réponse.

a) Soit $\frac{1}{z} = u$, alors $z = \frac{1}{u}$ et

$$\frac{1}{z^2}e^{\frac{1}{z}} = u^2e^u = u^2\left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + ...\right) \texttt{(2 pts.)}$$
$$= u^2 + u^3 + \frac{u^4}{2!} + \frac{u^5}{3!} + ...$$
$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{3!z^5} + ... \texttt{(2 pts.)}$$

b) La partie principale de la série de Laurent possède une infinité de termes (1 pt.), donc le point $z = 0$ est une **singularité essentielle** (1 pt.).

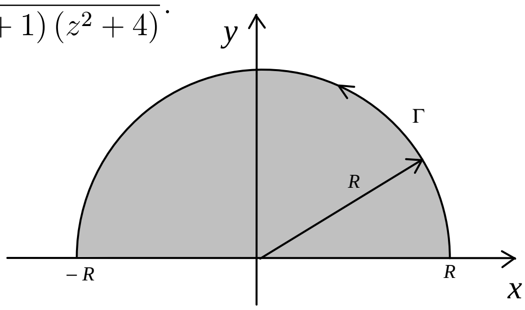
c) Le résidu de $f(z)$ en $z = 0$ est le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans la série de Laurent (1 pt.). Alors $\text{Res}(f, 0) = 0$ puisque la série de Laurent de $f(z)$ n'a pas le terme $\frac{1}{z}$ (1 pt.).

==

Exercice 2 (12 points) : On considère la fonction $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$.

a) Trouver les résidus de $f(z)$ en tous les pôles.

b) Par application du théorème des résidus calculer $\oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}dz$ où C désigne le contour fermé de la figure ci-contre formé du segment, $[-R, +R]$ et du demi cercle Γ décrit dans le sens direct.



c) En déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$.

Réponse.

a) La fonction $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$ **possède quatre pôles simples en** $z = i$**,** $-i$**,** $2i$ **et** $-2i$ (2 pts.) [**racines de** $(z^2+1)(z^2+4)$].

Le résidu en $z = i$ **est**

$$\lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)(z^2+4)} \overset{(0{,}5\text{ pt.})}{=} \lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{1}{(2i)(3)} \overset{(0{,}5\text{ pt.})}{=} \frac{-i}{6}.$$

Le résidu en $z = -i$ **est**

$$\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{1}{(z-i)(z+i)(z^2+4)} \overset{(0{,}5\text{ pt.})}{=} \lim_{z\to -i}\frac{1}{(z-i)(z^2+4)} = \frac{1}{(-2i)(3)} \overset{(0{,}5\text{ pt.})}{=} \frac{i}{6}.$$

Le résidu en $z = 2i$ **est**

$$\lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{1}{(z^2+1)(z-2i)(z+2i)} \overset{(0{,}5\text{ pt.})}{=} \lim_{z\to 2i}\frac{1}{(z^2+1)(z+2i)} = \frac{1}{(-3)(4i)} \overset{(0{,}5\text{ pt.})}{=} \frac{i}{12}.$$

Le résidu en $z = -2i$ **est**

$$\lim_{z\to -2i}(z+2i)\frac{1}{(z^2+1)(z-2i)(z+2i)} \overset{(0{,}5\text{ pt.})}{=} \lim_{z\to -2i}\frac{1}{(z^2+1)(z-2i)} = \frac{1}{(-3)(-4i)} \overset{(0{,}5\text{ pt.})}{=} \frac{-i}{12}.$$

b) Les pôles intérieurs à C **sont** $z = i$ **et** $z = 2i$ (1 pt.). **Par application du théorème des résidus**

$$\oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}dz = 2\pi i\left\{\mathbf{Res}(f,i) + \mathbf{Res}(f,2i)\right\} \overset{(1\text{ pt.})}{=} 2\pi i\left(\frac{-i}{6}+\frac{i}{12}\right) \overset{(1\text{ pt.})}{=} \frac{\pi}{6}. \qquad (1)$$

c) L'intégrale (1) peut être partagée et s'écrit sous forme

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx + \int_\Gamma \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}dz = \frac{\pi}{6}\text{(1 pt.)}. \qquad (2)$$

Si l'on prend la limite des deux membres de (2) quand $R\to\infty$ **et si l'on utilise le fait que**

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}dz = \lim_{R\to\infty}\int_0^\pi \frac{1}{(R^2e^{2i\theta}+1)(R^2e^{2i\theta}+4)}R\,ie^{i\theta}d\theta = 0\text{(1 pt.)},$$

on obtient $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \frac{\pi}{6}$ (1 pt.).

==

Nantissement : Sur mon honneur, je n' ai ni donné, ni reçu de l' aide sur ce test. Signé..