

Nom : Matricule : **Forme A**

Prénom : Groupe :

Exercice 1 (8 points) : a) Développer en série de Laurent autour de son point singulier $f(z) = \frac{1}{z^2} e^{\frac{1}{z}}$.

- b) Préciser la nature de son point singulier.
- c) En déduire le résidu de $f(z)$ en ce point singulier.

Réponse.

a) Soit $\frac{1}{z} = u$, alors $z = \frac{1}{u}$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} e^{\frac{1}{z}} &= u^2 e^u = u^2 \left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots \right) \\ &= u^2 + u^3 + \frac{u^4}{2!} + \frac{u^5}{3!} + \dots \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{3!z^5} + \dots \end{aligned}$$

b) La partie principale de la série de Laurent possède une infinité de termes, donc le point $z = 0$ est une **singularité essentielle**.

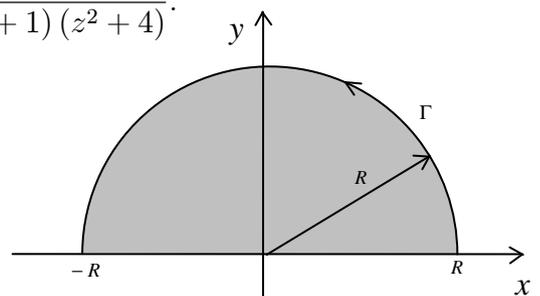
c) Le résidu de $f(z)$ en $z = 0$ est le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans la série de Laurent. Alors $\text{Res}(f, 0) = 0$ puisque la série de Laurent de $f(z)$ n'a pas le terme $\frac{1}{z}$.

Exercice 2 (12 points) : On considère la fonction $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}$.

a) Trouver les résidus de $f(z)$ en tous les pôles.

b) Par application du théorème des résidus calculer

$\oint_C \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz$ où C désigne le contour fermé de la figure ci-contre formé du segment, $[-R, +R]$ et du demi



cercle Γ décrit dans le sens direct.

c) En déduire $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$.

Réponse.

a) La fonction $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}$ possède quatre pôles simples en $z = i, -i, 2i$ et $-2i$ [racines de $(z^2 + 1)(z^2 + 4)$].

Le résidu en $z = i$ est

$$\lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{1}{(z - i)(z + i)(z^2 + 4)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z + i)(z^2 + 4)} = \frac{1}{(2i)(3)} = \frac{-i}{6}.$$

Le résidu en $z = -i$ est

$$\lim_{z \rightarrow -i} (z + i) \frac{1}{(z - i)(z + i)(z^2 + 4)} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{(z - i)(z^2 + 4)} = \frac{1}{(-2i)(3)} = \frac{i}{6}.$$

Le résidu en $z = 2i$ est

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \frac{1}{(z^2 + 1)(z - 2i)(z + 2i)} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 2i)} = \frac{1}{(-3)(4i)} = \frac{i}{12}.$$

Le résidu en $z = -2i$ est

$$\lim_{z \rightarrow -2i} (z + 2i) \frac{1}{(z^2 + 1)(z - 2i)(z + 2i)} = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{1}{(z^2 + 1)(z - 2i)} = \frac{1}{(-3)(-4i)} = \frac{-i}{12}.$$

b) Les pôles intérieurs à C sont $z = i$ et $z = 2i$. Par application du théorème des résidus

$$\oint_C \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz = 2\pi i \{ \text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, 2i) \} = 2\pi i \left(\frac{-i}{6} + \frac{i}{12} \right) = \frac{\pi}{6}. \quad (1)$$

c) L'intégrale (1) peut être partagée et s'écrit sous forme

$$\int_{-R}^R \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx + \int_{\Gamma} \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz = \frac{\pi}{6}. \quad (2)$$

Si l'on prend la limite des deux membres de (2) quand $R \rightarrow \infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{(R^2 e^{2i\theta} + 1)(R^2 e^{2i\theta} + 4)} R i e^{i\theta} d\theta = 0,$$

on obtient $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \frac{\pi}{6}.$

=====
 Nantissement : Sur mon honneur, je n' ai ni donné, ni reçu de l' aide sur ce test. Signé.....