U.S.T.H.B. 2011-2012 Semestre 2 — Math 4 : Analyse complexe

Faculté de Mathématiques — $2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section C

Épreuve de TD (interrogation) - 10 avril 2012. Durée : 45 minutes

Nom :.. **Matricule :**.. **Forme** A

Prénom :.. **Groupe :**..

==

Exercice 1 (5 points) : Calculer $\operatorname{Log}(1-i)$.

Réponse.

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(1-i) &= \ln(|1-i|) + i\arg(1-i)\\ &= \ln\sqrt{2} + i\left(-\tfrac{\pi}{4}+2k\pi\right), k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

==

Exercice 2 (5 points) : Séparer les parties réelle et imaginaire de la fonction $f(z) = e^{-3z}$.

Réponse.

On a

$$\begin{aligned}f(z) &= e^{-3z} = e^{-3(x+iy)} = e^{-3x}e^{-3iy}\\ &= e^{-3x}\{\cos(3y) - i\sin(3y)\} = e^{-3x}\cos(3y) - ie^{-3x}\sin(3y).\end{aligned}$$

Alors $\operatorname{Re}(f) = e^{-3x}\cos(3y)$ et $\operatorname{Im}(f) = -e^{-3x}\sin(3y)$.

==

Exercice 3 (5 points) : Examiner si la fonction $f(z) = x^2 - y^2 - x + i(2xy - y)$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

Réponse.

Si les dérivées partielles sont continues dans le domaine indiqué, les équations de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ sont nécessaires et suffisantes pour que $f = u + iv$ soit holomorphe.

On a $u = x^2 - y^2 - x$ et $v = 2xy - y$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 1 \ \rightarrow\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \ \rightarrow \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites, la fonction f est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$.

==

Exercice 4 (5 pts): Calculer $\oint_C (x - 2iy)(dx + idy)$ le long de la parabole $x = t$, $y = t^2$ de $(0,0)$ à $(1,1)$.

Réponse.

Les points $(0,0)$ et $(1,1)$ sur C correspondant à $t = 0$ et à $t = 1$. L'intégrale curviligne considérée vaut donc

$$\begin{aligned}
\int_{t=0}^{1} \left(t - 2it^2\right)(dt + 2itdt) &= \int_0^1 \left(t - 2it^2\right)(1 + 2it)\,dt \\
&= \int_0^1 \left(t + 4t^3\right) dt \\
&= \left[\frac{1}{2}t^2 + t^4\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

==

Exercice 5 (supplémentaire) :

À l'aide de la formule intégrale de Cauchy $f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$, calculer $\oint_C \frac{z}{z-1}dz$ où C désigne le cercle $|z| = 2$.

Réponse.

L'application de la formule de Cauchy pour $a = 1$ et $f(z) = z$ donne

$$f(1) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-1}dz \quad \text{ou} \quad 1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z}{z-1}dz.$$

D'où $\oint_C \frac{z}{z-1}dz = 2\pi i.$

==

Nantissement : Sur mon honneur, je n'ai ni donné, ni reçu de l'aide sur ce test. Signé..