Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumedienne[1]

Faculté des Mathématiques

Département d'Analyse

Notes de Cours du module

Équations différentielles

Par

LAADJ Toufik[2]

Pour

Troisième année Licence

2021

[1]USTHB : Bab Ezzouar Alger, Algérie.
[2]Page Web : http://perso.usthb.dz/~tlaadj/

Table des matières

Table des matières iii

1 Généralités sur les équations différentielles 1

1.1 Notion d'équation différentielle . . . 2

1.1.1 Différents types d'équations différentielles . . . 2

1.1.2 Équations différentielles linéaires . . . 3

1.2 Notions de solutions . . . 4

1.2.1 Solution d'une équation différentielle . . . 4

1.2.2 Conditions initiales . . . 4

1.2.3 Problème de Cauchy . . . 5

1.2.4 Solutions générale, particulière et singulière . . . 5

1.2.5 Solutions maximales . . . 6

1.2.6 Solutions globales . . . 6

1.2.7 Courbes intégrales d'une équation différentielle . . . 7

1.3 Réduction de l'ordre d'une équation différentielle à 1 . . . 7

1.4 Exercices . . . 9

1.5 Solution des exercices sélectionnés . . . 10

2 Équations différentielles du premier ordre 11

2.1 Interprétation géométrique . . . 12

2.1.1 Champ des tangentes . . . 13

2.1.2 Lignes isoclines . . . 13

2.2 Équations incomplètes . . . 13

2.2.1 Incomplète en y ou absence de y ; équation du type $F(t, y') = 0$ . . . 14

2.2.2 Incomplète en t ou absence de t ; équation du type $F(y, y') = 0$ 14
2.3 Équations à variables séparées 15
2.4 Équations différentielles type-homogènes 16
2.5 Équations aux différentielles totales, facteur intégrant 17
2.5.1 Équations aux différentielles totales 17
2.5.2 Facteur intégrant 18
2.6 Équations différentielles linéaires 19
2.6.1 Méthode de la variation de la constante 20
2.6.2 Équations différentielles linéaires à coefficients constants 21
2.7 Autres types d'équations différentielles 25
2.7.1 Équation de Bernoulli 25
2.7.2 Équation de Riccati 27
2.7.3 Équations différentielles de Lagrange et Clairaut 28
2.8 Équations différentielles et familles de courbes 29
2.8.1 Équation différentielle associée à une famille de courbes 29
2.8.2 Trajectoires orthogonales à une famille de courbes 29
2.9 Exercices 30
2.10 Solution des exercices sélectionnés 32

3 Équations différentielles du second ordre 38
3.1 Équations différentielles du second ordre incomplètes 39
3.1.1 Équations du type $y'' = f(t, y')$ 39
3.1.2 Équations du type $y'' = f(y, y')$ 39
3.1.3 Équations du type $y'' = f(y)$ 40
3.2 Équations différentielles type-homogènes du second ordre 41
3.3 Équations différentielles linéaires du second ordre 41
3.3.1 Équations linéaires homogènes du second ordre 42
3.3.2 Équations linéaires non homogènes du second ordre 43
3.4 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants 45
3.4.1 Recherche d'une solution particulière pour des seconds membres spécifiques 46
3.4.2 Solution particulière par la méthode de variation des constantes 49
3.5 Équations linéaires homogènes à coefficients analytiques 50
3.5.1 Coefficients analytiques, points réguliers 52

3.5.2 Coefficients analytiques, points singuliers 54
3.6 Exercices 60
3.7 Solution des exercices sélectionnés 62

4 Théorie des équations différentielles **70**
4.1 Théorie de Cauchy-Lipschitz 70
4.2 Exercices 72
4.3 Solution des exercices 72

Références **75**

Chapitre 1

Généralités sur les équations différentielles

Sommaire

1.1 Notion d'équation différentielle 2

1.1.1 Différents types d'équations différentielles 2

1.1.2 Équations différentielles linéaires 3

1.2 Notions de solutions 4

1.2.1 Solution d'une équation différentielle 4

1.2.2 Conditions initiales 4

1.2.3 Problème de Cauchy 5

1.2.4 Solutions générale, particulière et singulière 5

1.2.5 Solutions maximales 6

1.2.6 Solutions globales 6

1.2.7 Courbes intégrales d'une équation différentielle 7

1.3 Réduction de l'ordre d'une équation différentielle à 1 7

1.4 Exercices 9

1.5 Solution des exercices sélectionnés 10

Dans ce premier chapitre, nous introduisons quelques définitions essentielles pour la suite de ce cours.

1.1 Notion d'équation différentielle

1.1.1 Différents types d'équations différentielles

Définition 1 (Équation différentielle ordinaire)

On appelle équation différentielle ordinaire (EDO) une relation entre une variable réelle indépendante t, une fonction inconnue $t \mapsto y(t)$ et ses dérivées $y', y'', \cdots, y^{(n)}, n \in \mathbb{N}^*$.

L'ordre d'une EDO est défini comme étant l'ordre de la dérivée la plus élevée figurant dans l'équation. Ainsi, une équation différentielle d'ordre n se présente sous la forme

$$F\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1.1}$$

La fonction F est une fonction de $n+2$ variables.

La fonction inconnue $t \mapsto y(t)$ de la variable réelle t est à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^k, k = 2, 3, \cdots$.

On prendra t dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ (I peut être $\mathbb{R}$ tout entier).

Exemple 1

a) $y' + ty = e^t$ est une équation différentielle du premier ordre.

b) $y'' + 4ty = 0$ est une équation différentielle du second ordre.

c) $y^{(9)} - ty'' = t^2$ est une équation différentielle d'ordre 9. ∎

Définition 2 (Équation différentielle normale)

Si l'équation $F\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$ est résoluble par rapport à $y^{(n)}$, alors l'EDO prend sa forme *normale* ou *résolue*

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}\right).$$

Exemple 2

La forme normale d'une équation différentielle du premier ordre ($n = 1$), $F(t, y, y') = 0$ s'écrit $y' = f(t, y)$. Par exemple, $y' = ty^2 + e^t$. ∎

Remarque 3

Dans le cas où une équation différentielle n'est pas résoluble par rapport à $y^{(n)}$, elle est dite *implicite*.

Exemple 3

L'équation différentielle $y' + e^{y'} = y + t$ ne peut pas se mettre sous forme résolue. ∎

Définition 4 (Équation différentielle autonome)

Une équation différentielle *autonome* est un cas particulier important des équations différentielles où la variable t n'apparaît pas dans l'équation. C'est une équation de la forme

$$F\left(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Il s'agit du cas où la fonction F ne dépend pas explicitement de t.

Exemple 4

L'équation $y' = f(y) = y^2 + e^y$ est une équation différentielle autonome du premier ordre. ∎

1.1.2 Équations différentielles linéaires

Donnons maintenant une classification par linéarité.

Définition 5 (Équation différentielle linéaire)

On appelle équation différentielle *linéaire* toute équation de la forme :

$$a_n(t)\, y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_2(t)\, y'' + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = g(t),$$

où les fonctions $t \mapsto a_j(t), 0 \leq j \leq n$, sont appelées coefficients de l'équation.

La fonction $t \mapsto g(t)$ est appelée le second membre. Si g est nulle, alors l'équation est dite *homogène* ou sans second membre.

L'équation différentielle

$$a_n(t)\, y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_2(t)\, y'' + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = 0,$$

est appelée équation différentielle homogène associée.

Si $a_j(t), 0 \leq j \leq n$, sont des constantes, on parle d'équation différentielle linéaire à *coefficients constants*.

Exemple 5

L'équation différentielle $(t^2+1)\, y'' = e^t y + \operatorname{Arctg} t$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 et son équation différentielle homogène associée est $(t^2+1)\, y'' = e^t y$. ∎

Exemple 6

Les équations différentielles suivantes ne sont pas linéaires.

a) $y' + y^2 - t = 0$ **b)** $y'' - e^y y' = 2y$ **c)** $y''' + tyy' - 2y = \sin t$

d) $(2-y)\, y' + y = \ln t$ **e)** $y'' + \sin y = 1$ **f)** $y^{(5)} + y^2 y' = t.$ ∎

1.2 Notions de solutions

1.2.1 Solution d'une équation différentielle

Définition 6 (Solution d'une équation différentielle)

On appelle *solution* (ou intégrale) de l'équation différentielle $F\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$ un couple (I, y), où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et y une fonction n fois dérivable définie sur I telle que pour tout t de I, on ait

$$F\left(t, y(t), y'(t), y''(t), \cdots, y^{(n)}(t)\right) = 0.$$

Résolution d'une équation différentielle

Résoudre ou intégrer une équation différentielle consiste à rechercher :

- un intervalle I de $\mathbb{R}$,
- une fonction y suffisamment dérivable et vérifiant l'équation différentielle sur I.

Exemple 7

L'équation $y' - y = 0$ admet $(I, y) = ([0, 1], \exp)$ comme solution, mais aussi $(I, y) = (\mathbb{R}, \exp)$. La première est la restriction de la seconde. ▪

1.2.2 Conditions initiales

Définition 7 (Conditions initiales)

On peut aussi rechercher des solutions qui vérifient certaines conditions en un point t_0 : $y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$.
On appelle ce type de condition des *conditions initiales*.

Exemple 8

La fonction $t \mapsto y(t) = \operatorname{tg} t$ est solution de l'équation différentielle $y' - y^2 = 1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et vérifie la condition initiale $y(0) = 0$. ▪

Exemple 9

La fonction $t \mapsto y(t) = \operatorname{Ch} t$ est solution de l'équation différentielle $(y')^2 - y^2 = -1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie la condition initiale $y(0) = 1$. ▪

1.2.3 Problème de Cauchy

Définition 8 (Problème de Cauchy)

On appelle problème de *Cauchy* la donnée d'une équation différentielle résolue d'ordre n,

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}\right)$$

et de n conditions initiales

$$y\left(t_0\right) = y_0,\ y'\left(t_0\right) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}\left(t_0\right) = y_{n-1}.$$

On verra plus tard que dans un cadre assez fréquent, les problèmes de Cauchy admettent en général une unique solution définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1.2.4 Solutions générale, particulière et singulière

Résoudre ou intégrer une équation différentielle sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ tout entier consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle d'ordre n, $F\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$ dépend en général de n constantes arbitraires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

Définition 9 (Solutions générale et particulière)

- La famille de solutions (y_λ) d'indice $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ est appelée solution (ou intégrale) *générale*.
- Une solution particulière est obtenue en imposant une condition (initiale) sur y_λ.

Définition 10 (Solutions singulières)

Il arrive parfois qu'en plus de la solution générale on ait des solutions particulières $y = \varphi_0(t), y = \varphi_1(t), \cdots$, qui ne s'obtiennent pour aucune valeur de λ : on dit que ce sont des solutions *singulières*.

Exemple 10

On peut vérifier que $y^2 + (yy')^2 = 1$ admet pour solutions $y_\lambda = \pm\sqrt{1 - (t-\lambda)^2}, \lambda \in \mathbb{R}$ et deux fonctions $\bar{y}_1 = -1, \bar{y}_2 = 1$. Les solutions $\bar{y}_1$ et $\bar{y}_2$ qui n'appartiennent pas à la famille y_λ sont des solutions singulières. ∎

1.2.5 Solutions maximales

Définition 11 (Prolongement)

Soient $y : I \to \mathbb{R}^k$ et $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}^*$ deux solutions de $F\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$, on dit que $\tilde{y}$ est un *prolongement* de y si $\tilde{I} \supset I$ et $\tilde{y}|_I = y$.

Définition 12 (Solution maximale)

On dit qu'une solution $y : I \to \mathbb{R}^k$ est *maximale* si y n'admet pas de prolongement $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^k$ avec $\tilde{I} \supsetneq I$.

Exemple 11

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ définie sur $]0, +\infty[$ est une solution maximale de l'équation $y' + y^2 = 0$. ▪

Théorème 13

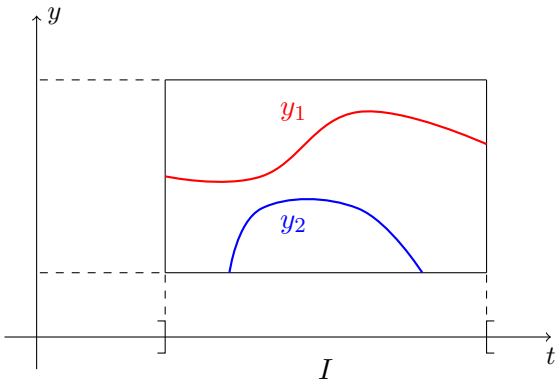
Toute solution y se prolonge en une solution maximale $\tilde{y}$ (pas nécessairement unique).

Démonstration. Voir le livre de Demailly [1, page 128] ■

1.2.6 Solutions globales

Définition 14 (Solution globale)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une solution (I, y) est dite *globale* dans I si elle est définie sur l'intervalle I tout entier.



Remarque 15

Toute solution globale est maximale, mais une solution maximale peut tout à fait ne pas être globale.

Sur la figure ci-dessus par exemple, y_1 est globale tandis que y_2 est maximale mais non globale.

Exemple 12

On considère l'équation différentielle $y' = y^2$. Cherchons les solutions de cette équation.

On a d'une part $y(t) \equiv 0$ est une solution.

Si y ne s'annule pas, $y' = y^2$ s'écrit sous forme $\frac{y'}{y^2} = 1$, d'où par intégration

$$-\frac{1}{y(t)} = t + \lambda \text{ ou } y(t) = -\frac{1}{t+\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cette formule définit en fait deux solutions, définies respectivement sur $]-\infty, -\lambda[$ et sur $]-\lambda, +\infty[$; ces solutions sont maximales mais non globales. Dans cet exemple $y(t) \equiv 0$ est la seule solution globale de $y' = y^2$. ∎

1.2.7 Courbes intégrales d'une équation différentielle

Définition 16 (Courbes intégrales)

Les courbes représentatives des solutions maximales d'une équation différentielle sont appelées *courbes intégrales*.

Exemple 13

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $ty' - y = 0$ est donné par l'ensemble des fonctions de la forme $y = \lambda t$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc, les courbes intégrales de cette équation sont des droites qui passent par l'origine, sauf l'axe des y. ∎

Exemple 14

L'équation différentielle $y'' = 0$ admet pour courbes intégrales les droites d'équation $y = at + b$, c'est-à-dire l'ensemble des droites du plan non parallèles à l'axe Oy. ∎

Plus généralement la résolution d'une équation différentielle consiste à déterminer ses courbes intégrales, soit par une équation $y = f(t)$, soit par $\varphi(t, y) = 0$, soit même géométriquement.

1.3 Réduction de l'ordre d'une équation différentielle à 1

Une équation différentielle d'ordre n

$$F\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$$

peut se lire aussi comme une équation du premier ordre de fonction inconnue

$$v(t) = (y_0(t), y_1(t), \cdots, y_{n-1}(t)).$$

L'équation se réécrit en effet, en notant $y_0 = y$:

$$y_1 = y_0', y_2 = y_1', \cdots, y_{n-1} = y_{n-2}', F\left(t, y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_{n-1}'\right) = 0$$

ou encore, en définissant G par

$$G(t, v_0, \cdots, v_{n-1}, w_0, \cdots, w_{n-1}) = (w_0 - v_1, \cdots, w_{n-2} - v_{n-1}, F(t, v_0, \cdots, v_{n-1}, w_{n-1}))$$

on obtient

$$G(t, v, v') = 0.$$

Si l'équation d'ordre n était sous forme normale ou résolue

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}\right)$$

l'équation équivalente d'ordre 1 le sera aussi :

$$v' = g(t, v)$$

avec $g(t, v_0, \ldots, v_{n-1}) = (v_1, \ldots, v_{n-2}, f(t, v_0, \cdots, v_{n-1}))$.

De plus, dans les deux cas (forme implicite ou forme résolue), si l'équation d'ordre n était autonome, celle d'ordre 1 le sera aussi et si l'équation était linéaire, elle le reste.

Exemple 15

L'équation différentielle linéaire d'ordre 2, normale et autonome $y'' = y$ se transforme en équation du premier ordre à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. La fonction inconnue de la nouvelle équation différentielle est une fonction $t \mapsto v(t) = (y(t), z(t))$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ et l'équation s'écrit sous forme $v' = g(v)$ avec $g(y, z) = (z, y)$. L'équation peut aussi s'écrire matriciellement comme $v' = Av$ avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. ∎

Remarque 17

Constatons que lorsque nous abaissons l'ordre d'une équation différentielle, nous augmentons la dimension de l'espace d'arrivée de F et passons nécessairement à la résolution d'un système d'équations différentielles d'ordre 1.

1.4 Exercices

Exercice 1.1

Trouver les équations différentielles qui ont pour solution générale les fonctions $y = f(t)$ données ci-dessous, α, β et γ étant des constantes.

a) $y = \alpha t$ **b)** $y = \alpha e^t$ **c)** $y = \sin(t + \alpha)$

d) $y = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta$ **e)** $y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ **f)** $t^2 y^3 + t^3 y^5 = \alpha$.

Exercice 1.2

Montrer que si dans l'équation d'ordre n

$$F\left(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0,$$

la variable t n'entre pas explicitement, alors son ordre peut être rabaissé d'une unité à l'aide du changement de variable et de fonction $y' = v(y)$ où v est la nouvelle fonction inconnue.

Exercice 1.3

Dire si les équations différentielles suivantes sont linéaires, ou non linéaires, et donner leur ordre

a) $y' + y - t = 0$ **b)** $y'' - y' = 2y$ **c)** $y''' + ty - 2y = \sin t$

d) $(2 - y)\, y' + y = \ln t$ **e)** $y'' + \sin y = 1$ **f)** $y^{(5)} + y^2 = t$.

Exercice 1.4

À l'aide du changement de variables ou de dérivation, ramener les équations suivantes sous forme linéaire

a) $t = (y^2 - 2y + 1)\, y'$ **b)** $(t + 1)(yy' - 1) = y^2$

c) $y(t) = \int_0^t y(s)\, ds + t + 1$ **d)** $\int_0^t (t - s)\, y(s)\, ds = 2t + \int_0^t y(s)\, ds$.

Exercice 1.5

Montrer que $y = 2t + \lambda e^t$ est solution de l'équation différentielle $y' - y = 2(1 - t)$ et trouver la solution particulière dont la courbe intégrale passe par le point $t = 0, y = 3$.

Exercice 1.6

À l'aide du changement de fonctions $z = y, w = y'$, transformer l'équation différentielle

$$y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = c(t)$$

à un système d'équations du premier ordre.

1.5 Solution des exercices sélectionnés

Solution de l'exercice 1.1.

a) $y = \alpha t$: La fonction $f(t) = \alpha t$ est dérivable et $f'(t) = \alpha$. En éliminant α entre ces deux équations on trouve $f(t) = tf'(t)$. Donc l'équation différentielle vérifiée par $f(t) = \alpha t$ est $y = ty'$.

b) $y = \alpha e^t$: La fonction $f(t) = \alpha e^t$ est dérivable et $f'(t) = \alpha e^t = f(t)$. Alors l'équation différentielle vérifiée par $f(t) = \alpha e^t$ est $y = y'$.

d) $y = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t$: La fonction $f(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t$ contient deux constantes et elle est deux fois dérivable, et on $f'(t) = \alpha t + \beta$, $f''(t) = \alpha$. En éliminant α et β entre ces trois équations on trouve $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 f''(t) + tf'(t)$. Donc l'équation différentielle vérifiée par $f(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t$ est $-\frac{1}{2}t^2 y'' + ty' = y$.

Solution de l'exercice 1.3.

a) $y' + y - t = 0$: linéaire d'ordre 1. **b)** $y'' - y' = 2y$: linéaire d'ordre 2.

c) $y''' + ty - 2y = \sin t$: linéaire d'ordre 3. **d)** $(2 - y)\, y' + y = \ln t$: non linéaire d'ordre 1.

e) $y'' + \sin y = 1$: non linéaire d'ordre 2. **f)** $y^{(5)} + y^2 = t$: non linéaire d'ordre 5.

Solution de l'exercice 1.5.

La fonction $f(t) = 2t + \lambda e^t$ est dérivable et $f'(t) = 2 + \lambda e^t$. Ainsi

$$f'(t) - f(t) = 2 + \lambda e^t - \left(2t + \lambda e^t\right) = 2(1 - t).$$

Donc $y = 2t + \lambda e^t$ est bien solution de l'équation différentielle $y' - y = 2(1 - t)$.
Si $t = 0$ on a $y = 3 = 0 + \lambda e^0$, d'où $\lambda = 3$. Alors la solution particulière dont la courbe intégrale passe par le point $t = 0, y = 3$ est

$$y = 2t + 3e^t.$$

Chapitre 2

Équations différentielles du premier ordre

Sommaire

2.1 Interprétation géométrique 12

2.1.1 Champ des tangentes 13

2.1.2 Lignes isoclines 13

2.2 Équations incomplètes 13

2.2.1 Incomplète en y ou absence de y ; équation du type $F(t, y') = 0$ . . . 14

2.2.2 Incomplète en t ou absence de t ; équation du type $F(y, y') = 0$ 14

2.3 Équations à variables séparées 15

2.4 Équations différentielles type-homogènes 16

2.5 Équations aux différentielles totales, facteur intégrant 17

2.5.1 Équations aux différentielles totales 17

2.5.2 Facteur intégrant 18

2.6 Équations différentielles linéaires 19

2.6.1 Méthode de la variation de la constante 20

2.6.2 Équations différentielles linéaires à coefficients constants 21

2.7 Autres types d'équations différentielles 25

2.7.1 Équation de Bernoulli 25

2.7.2 Équation de Riccati 27
2.7.3 Équations différentielles de Lagrange et Clairaut 28
2.8 Équations différentielles et familles de courbes 29
2.8.1 Équation différentielle associée à une famille de courbes 29
2.8.2 Trajectoires orthogonales à une famille de courbes 29
2.9 Exercices 30
2.10 Solution des exercices sélectionnés 32

Dans ce chapitre, nous examinerons un certain nombre de types classiques d'équations différentielles du premier ordre. Nous nous concentrons ici sur les techniques de résolution explicites qui peut amener le calcul des solutions aux calculs des primitives. L'étude théorique telle que l'existence et l'unicité de solutions sera traité plus tard dans un autre chapitre.

Il n'existe pas de méthode générale de la résolution explicite d'une équation différentielle. La première démarche à faire pour résoudre une équation différentielle, est de déterminer l'ordre et le type d'équation auquel on a affaire et ensuite, si c'est l'un des types usuels, on applique la méthode standard, sinon on peut essayer des changements de fonctions ou changements de variables.

La forme générale d'une équation différentielle du premier ordre est

$$F\left(t, y, y'\right) = 0.$$

Sa forme normale ou résolue s'écrit

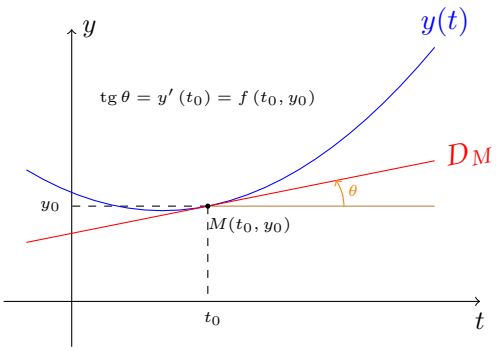
$$y' = f\left(t, y\right).$$

Nous resterons dans le cas scalaire, parce qu'il est plus facile à manipuler et à comprendre. Le cas où F sera à valeurs dans $\mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}^*$ et ≥ 2 sera traité plus tard.

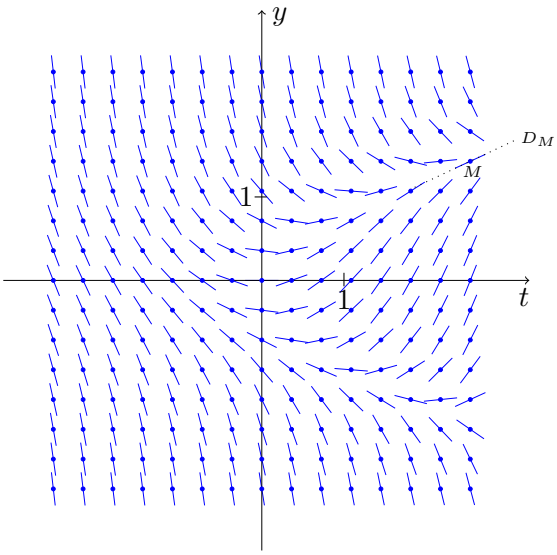
2.1 Interprétation géométrique

À tout point $M = (t_0, y_0)$, on associe la droite D_M passant par M et de coefficient directeur (pente) $y'\left(t_0\right) = f\left(t_0, y_0\right)$.

$$D_M \ : \ y - y_0 = f\left(t_0, y_0\right)\left(t - t_0\right).$$



2.1.1 Champ des tangentes



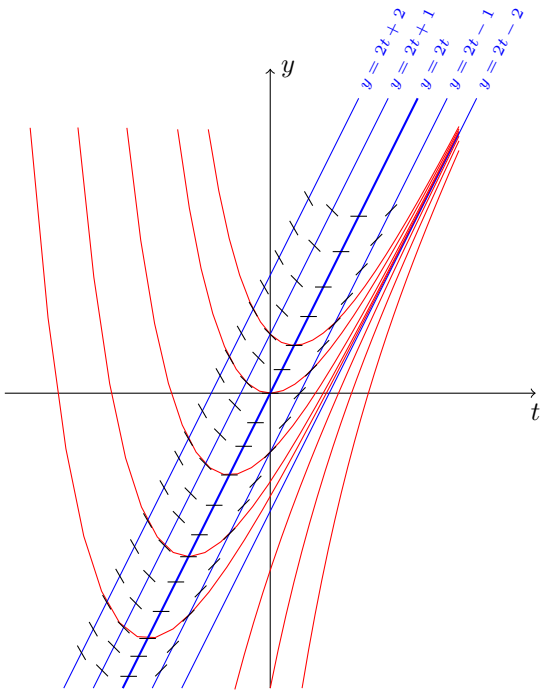
L'application $M \mapsto D_M$ est appelée *champ des tangentes* associé à l'équation $y' = f(t, y)$.
Une courbe intégrale de $y' = f(t, y)$ est une courbe différentiable C qui a pour tangente en chaque point $M \in C$ la droite D_M du champ des tangentes.
L'exemple ci-contre correspond à l'équation

$$y' = f(t, y) = t - y^2.$$

2.1.2 Lignes isoclines

On appelle ligne *isocline* de $y' = f(t, y)$ l'ensemble Γ_k des points M où la droite D_M a une pente donnée k. La famille d'isoclines est définie par l'équation $\Gamma_k : f(t, y) = k$.

Exemple 16



Les lignes isoclines de l'équation différentielle $y' = f(t, y) = 2t - y$ sont obtenues en posant $y' = k$, k constante, alors il vient $2t - y = k$ ou $y = 2t - k$. Les isoclines sont des droites parallèles. Pour $k = 0$ on obtient l'isocline $y = 2t$. Cette droite sépare le plan tOy en deux parties dans lesquelles la dérivée y' a le même signe. En coupant la droite $y = 2t$, les courbes intégrales passent de la région de décroissance de la fonction y dans la région de croissance et inversement, ce qui signifie que sur cette droite sont situés des points extrema des courbes intégrales. ∎

2.2 Équations incomplètes

On distingue deux types possibles : incomplète en y et incomplète en t.

2.2.1 Incomplète en y ou absence de y ; équation du type $F(t, y') = 0$

Trois cas usuels :

i) Équation résoluble sous la forme $y' = f(t)$, il suffit d'intégrer on obtient

$$y = \int f(t)\, dt = g(t) + C,$$

où C est la constante d'intégration, les courbes intégrales se déduisent de l'une d'elles par des translations parallèles à l'axe des y.

ii) Équation résoluble sous la forme $t = f(y')$, on pose $y' = s$ d'où $t = f(s)$, $dt = f'(s)ds$, $dy = sdt$ donne $dy = sf'(s)ds$, et une intégration par parties donne

$$y = sf(s) - \int f(s)ds = g(s) + C.$$

On trouve les courbes paramétrées $(t, y) = (f(s), g(s) + C)$.

iii) Équation susceptible d'un paramétrage $t = f(s)$, $y' = g(s)$, on tire $dy = g(s)f'(s)\, ds$ donc $y = \varphi(s) + C$, d'où encore des courbes paramétrées.

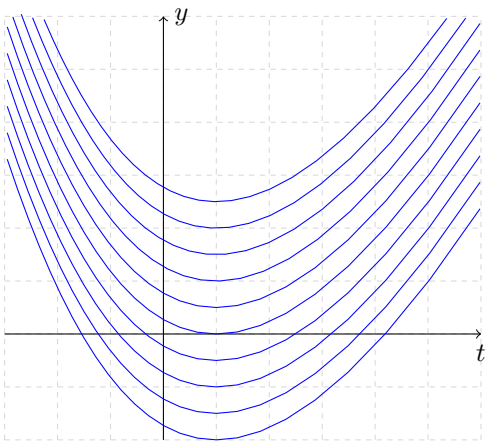
Exemple 17

Soit l'équation $y' + e^{y'} = t$.

On pose $y' = s$ ou $\frac{dy}{dt} = s$, d'où $t = s + e^s$ et $\frac{dt}{ds} = 1 + e^s$ donc $\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = s + se^s$. Par intégration par parties on trouve $y = \frac{1}{2}s^2 + (s-1)e^s + C$.

Les courbes intégrales sont données sous forme paramétriques par

$$(t, y) = \left(s + e^s, \tfrac{1}{2}s^2 + (s-1)e^s + C\right), C \in \mathbb{R}.$$



■

2.2.2 Incomplète en t ou absence de t ; équation du type $F(y, y') = 0$

Plusieurs cas sont possibles :

i) Si on a $y' = f(y)$ alors $dt = \dfrac{dy}{f(y)}$ et donc $t = g(y) + C$. Les courbes intégrales déduites de l'une d'entre elles par translations parallèles à l'axe des t.

ii) Si $y = f(y')$, on pose $y' = s$ d'où $y = f(s)$ et donc $sdt = dy = f'(s)ds$. Alors $dt = \dfrac{f'(s)}{s}ds$ et $t = \displaystyle\int \frac{f'(s)}{s}ds = \varphi(s) + C$.

iii) Paramétrage de $F(y, y') = 0$ sous la forme $y = f(s)$ et $y' = g(s)$.

On a $dy = f'(s)\,ds = g(s)ds$ d'où la solution donne $t = \varphi(s) + C$ si $g(s) \neq 0$.

Exemple 18

Considérons l'équation $y' = \sin y$.

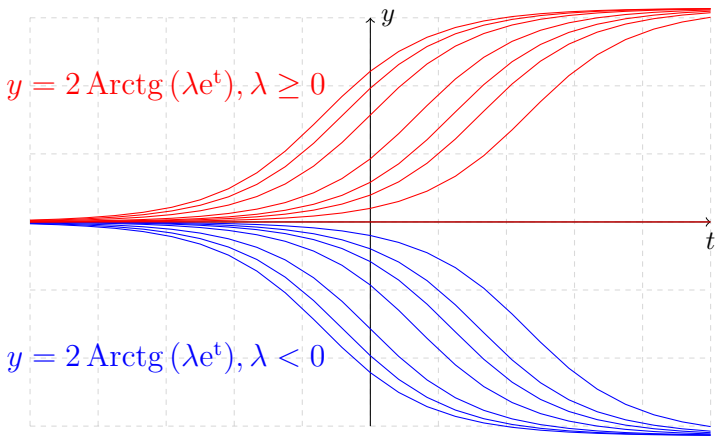
On a $dy = (\sin y)\,dt$ ou $dt = \frac{dy}{\sin y}$ alors $t = \int \frac{1}{\sin y} dy$.

Posons $s = \operatorname{tg} \frac{y}{2}$, on obtient

$$t = \operatorname{Log} \left|\operatorname{tg} \tfrac{y}{2}\right| + C$$

ce qui donne

$$y = 2 \operatorname{Arctg} \left(\lambda e^t\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



■

Exemple 19

Soit l'équation $y^2 + (y')^2 - 1 = 0$.

Posons $y = \sin s$, $y' = \cos s$ (sans oublier que $y' = \frac{dy}{dt}$).

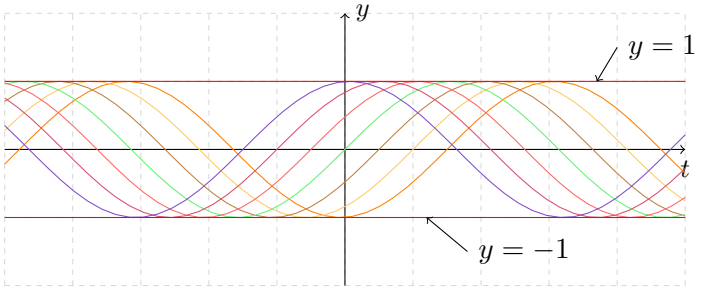
On a donc $dy = (\cos s)\,ds$ et $dy = y'dt = (\cos s)\,dt$, alors $(\cos s)\,ds = (\cos s)\,dt$.

Si $\cos s \neq 0$, $ds = dt$ ce qui donne $s = t + \lambda$ donc

$$y = \sin(t + \lambda), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si $\cos s = 0$, $s = \frac{\pi}{2} + k\pi$, donc

$$y = 1 \text{ ou } y = -1.$$



■

2.3 Équations à variables séparées

On appelle équation à variables séparées une équation différentielle du premier ordre $F(t, y, y') = 0$ qui peut se mettre sous la forme

$$f(y)y' = g(t).$$

Ou encore, avec $y' = \dfrac{dy}{dt}$ elle s'écrit

$$f(y)dy = g(t)dt,$$

En d'autres termes, les équations à variables séparées sont les équations dans lesquelles on peut regrouper t, dt d'une part et y, dy d'autre part. Elles s'intègrent en

$$\int f(y)dy = \int g(t)dt, \text{ soit } F(y) = G(t) + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 20

L'équation $t^2y' = e^y$ donne

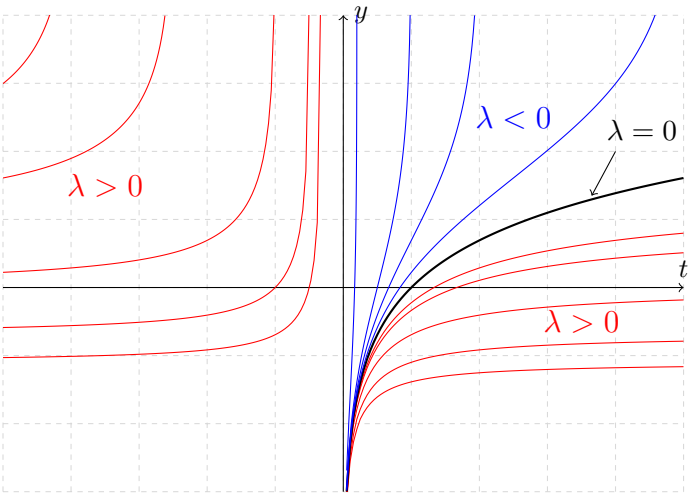
$$e^{-y}y' = \frac{1}{t^2} \text{ ou bien } e^{-y}dy = \frac{dt}{t^2},$$

ce qui donne par intégration

$$e^{-y} = \frac{1}{t} + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

On obtient finalement

$$y = \mathrm{Log}\left(\frac{t}{1+\lambda t}\right),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$



■

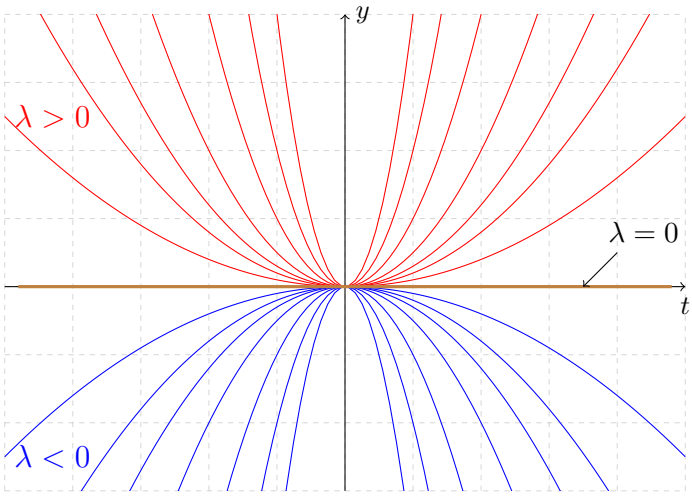
Exemple 21

L'équation $ty' = 2y$ l'on peut écrire $\frac{dy}{y} = 2\frac{dt}{t}$. On intègre alors $\int \frac{dy}{y} = \int 2\frac{dt}{t}$ ce qui donne $\mathrm{Log}\,|y| = 2\,\mathrm{Log}\,|t| + C$ ou beaucoup mieux

$$\mathrm{Log}\left|\frac{y}{\lambda}\right| = \mathrm{Log}\,|t|^2 \quad \text{où} \quad C = \mathrm{Log}\,|\lambda|\,.$$

Finalement, on trouve

$$y = \lambda t^2,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$



■

Remarque 18

On remarque que les équations incomplètes $y' = f(t)$ et $y' = g(y)$ sont des cas particuliers des équations à variables séparées.

2.4 Équations différentielles type-homogènes

Définition 19 (Équations différentielles *type-homogènes*)

On appelle équation différentielle *type-homogène* toute équation différentielle de la forme

$$F\left(y', \frac{y}{t}\right) = 0. \tag{2.1}$$

Elle se reconnaît au fait qu'elle est invariante par le changement de (t, y) en $(\lambda t, \lambda y)$, c'est-à-dire par une homothétie de centre O. Plusieurs cas se présentent suivant la forme pratique de (2.1).

a) Si on peut résoudre (2.1) sous la forme $y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$, on pose $s = \frac{y}{t}$, $y = st$, $y' = \frac{dy}{dt} = s + t\frac{ds}{dt} = f(s)$, c'est une équation à variables séparées. On peut aussi utiliser les coordonnées polaires, c'est-à-dire posons $t = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ et chercher $\rho(\theta)$.

b) Si on peut résoudre (2.1) sous la forme $y = tf(y')$, on pose $y' = u$, les variables se séparent et on arrive à un paramétrage des courbes intégrales.

Exemple 22

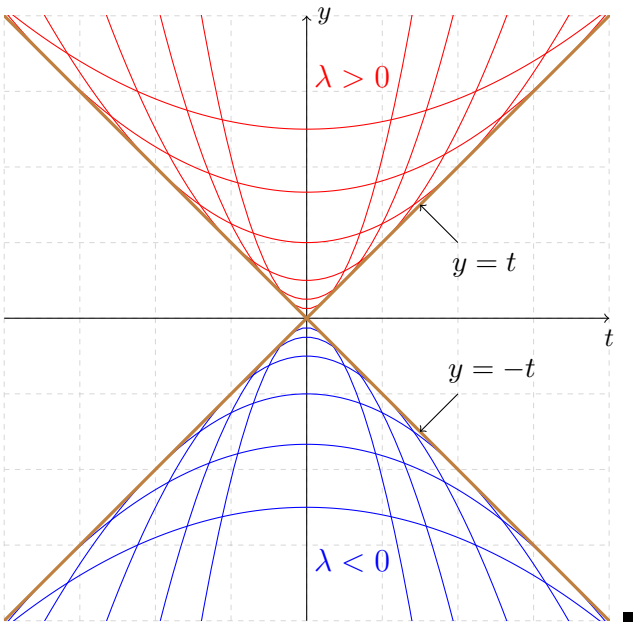
Soit $t(y')^2 - 2yy' + t = 0$, ou bien $y = \frac{t}{2}\left(y' + \frac{1}{y'}\right)$. En posant $y' = u$ il vient $y = \frac{t}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)$ et donc $dy = \frac{dt}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) + \frac{t}{2}\left(1 - \frac{1}{u^2}\right)du = udt$ d'où $(u^2 - 1)\,dt = t(u^2 - 1)\frac{du}{u}$.

Si $u^2 - 1 \neq 0$ alors $\frac{dt}{t} = \frac{du}{u}$, soit à une homothétie près $u = \lambda t$, qui donne

$$y_\lambda = \frac{1}{2}\left(\lambda t^2 + \frac{1}{\lambda}\right),\ \lambda \neq 0.$$

Si $u^2 - 1 = 0$ alors $u = \pm 1$ qui donne

$$\bar{y}_1 = t, \text{ et } \bar{y}_2 = -t.$$



2.5 Équations aux différentielles totales, facteur intégrant

2.5.1 Équations aux différentielles totales

Une équation différentielle de la forme $P(t, y) + Q(t, y)\,y' = 0$ qui s'écrit encore

$$P(t, y)\,dt + Q(t, y)\,dy = 0, \tag{2.2}$$

s'appelle équations aux différentielle totales (ou une différentielle exacte) si

$$\omega(t, y) = P(t, y)\,dt + Q(t, y)\,dy$$

représente une différentielle totale (ou exacte) d'une certaine fonction $u(t, y)$, c'est-à-dire si

$$Pdt + Qdy = du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Théorème 20

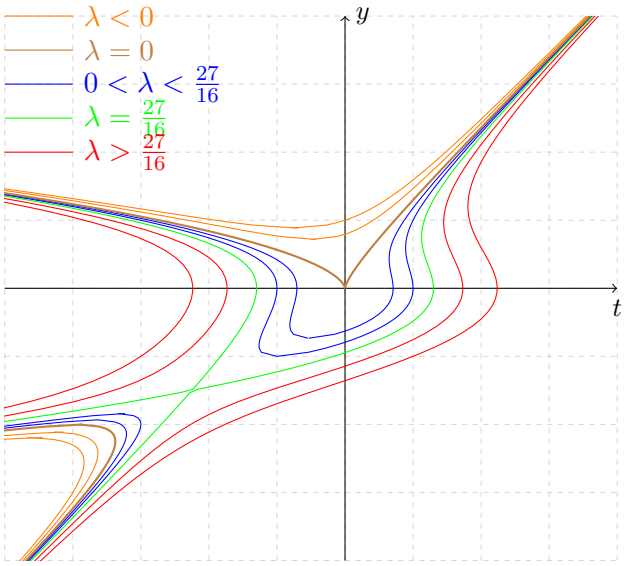
Pour que l'équation (2.2) soit une équation au différentielle totale, il faut et il suffit que dans un certain domaine D de variations des variables t et y soit satisfaite la condition

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

La solution ou l'intégrale générale de (2.2) est de la forme $u(t, y) = C$.

Exemple 23

L'équation $(2ty - 3y^2)\,y' + y^2 + t = 0$ s'écrit aussi $(y^2 + t)\,dt + (2ty - 3y^2)\,dy = 0$.
On a $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial t} = 2y$, donc on a affaire à une différentielle totale. En écrivant $\frac{\partial u}{\partial t} = y^2 + t$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = 2ty - 3y^2$, on trouve facilement que $u(t, y) = \frac{1}{2}t^2 + ty^2 - y^3 + c$. Notre équation originale est équivalente à $du(t, y) = 0$, donc $u(t, y) = \frac{1}{2}t^2 + ty^2 - y^3 + c = d$.
Finalement les courbes intégrales ont pour équation $t^2 + 2ty^2 - 2y^3 = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$.



■

2.5.2 Facteur intégrant

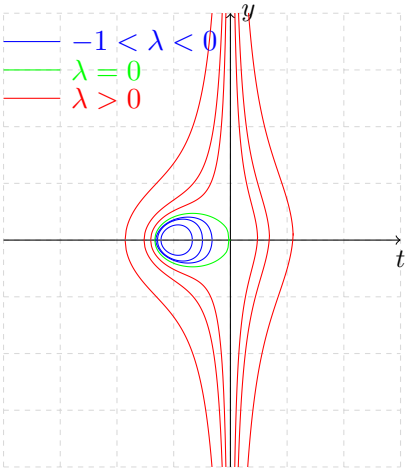
Dans certains cas où l'équation $P(t, y)dt + Q(t, y)dy = 0$ n'est pas aux différentielles totales, on arrive parfois à trouver une fonction $\mu(t, y)$ telle que $\mu(Pdt + Qdy)$ représente une différentielle totale d'une certaine fonction $u(t, y)$, c'est-à-dire $\mu Pdt + \mu Qdy = du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial y}dy$.
Une telle fonction μ s'appelle facteur intégrant. Elle vérifie $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial t}$.

Exemple 24

L'équation différentielle

$$tyy' + y^2 + t^2 + t = 0 \quad \text{ou} \quad \left(y^2 + t^2 + t\right)dt + tydy = 0$$

se résout beaucoup plus rapidement avec le facteur intégrant $\mu(t, y) = t$. On a $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$ et $\frac{\partial Q}{\partial t} = y$. Comme $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial t}$ donc le procédé dans le dernier exemple ne peut pas être appliqué. Considérons le facteur intégrant $\mu(t, y) = t$. En multipliant notre équation par t on obtient $(ty^2 + t^3 + t^2)\,dt + t^2ydy = 0$.



Cette fois on a bien $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial t} = 2ty$ donc on a affaire à une différentielle totale et en écrivant $\frac{\partial u}{\partial t} = ty^2 + t^3 + t^2$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = t^2 y$, on trouve $u(t,y) = \frac{1}{2}t^2y^2 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + c$ donc les courbes intégrales ont pour équation $3t^4 + 4t^3 + 6t^2y^2 = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$. ∎

2.6 Équations différentielles linéaires

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation linéaire par rapport à la fonction inconnue et à sa dérivée. Elle est de la forme

$$a(t)\, y' + b(t)\, y = c(t), \tag{2.3}$$

où a, b et c sont des fonctions données de t, continues dans le domaine où il s'agit d'intégrer l'équation (2.3). La fonction c est appelée second membre de l'équation différentielle, a et b sont appelées les coefficients.

Si $c(t) \equiv 0$ on dit que l'équation (2.3) est linéaire homogène ou sans second membre

$$a(t)\, y' + b(t)\, y = 0. \tag{2.4}$$

La fonction nulle est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\frac{y'}{y} = -\frac{b(t)}{a(t)}$ ou $\frac{dy}{y} = -\frac{b(t)}{a(t)}dt$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient

$$\text{Log}\,|y(t)| = -\int g(t)\, dt + K, \text{ avec } g(t) = \frac{b(t)}{a(t)},\ K \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque valeur de K, cela donne deux solutions, l'une toujours positive $y = e^K e^{-\int g(t)dt}$, l'autre toujours négative $y = -e^K e^{-\int g(t)dt}$.

On retrouve toutes ces solutions, y compris la solution nulle, en disant que la solution générale de l'équation homogène $a(t)\, y' + b(t)\, y = 0$ est

$$y_h = C\, e^{-\int g(t)dt},\quad g(t) = \frac{b(t)}{a(t)}, C \in \mathbb{R}.$$

Si la valeur de la solution en $t = 0$ est donnée, on écrit souvent $y(t) = y(0)\, e^{-\int_0^t g(s)ds}$.

Remarque 21

La fonction $(t,y) \mapsto \mu(t,y) = e^{\int g(t)dt},\ g(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$ est un facteur intégrant pour l'équation différentielle $y' + g(t)\, y = 0$.

Si nous supposons que $t \mapsto y_p(t)$ est une solution particulière de (2.3), on pose $y = y_p + u$ dans (2.3). Il vient

$$a(t)\, y_p' + b(t)\, y_p + a(t)\, u' + b(t)\, u = c(t).$$

Or $a(t)\, y_p' + b(t)\, y_p = c(t)$, donc $a(t)\, u' + b(t)\, u = 0$, soit u une solution de l'équation homogène (2.4). Ainsi la solution générale de l'équation (2.3) avec second membre est la somme d'une solution particulière de cette même équation (2.3), et de la solution générale de l'équation homogène associée (2.4).

$$y(t) = \underbrace{y_p(t)}_{\text{Solution particulière de (2.3)}} + \underbrace{y_h(t)}_{\text{Solution de l'équation homogène (2.4)}} = y_p(t) + C\, e^{-\int g(t)dt}, \quad g(t) = \tfrac{b(t)}{a(t)}.$$

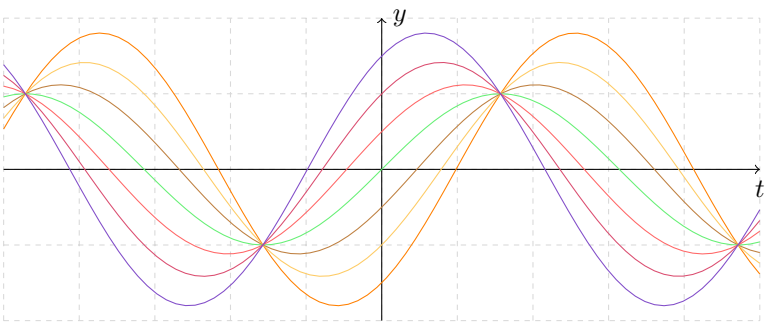
Exemple 25

L'équation $y' \cos t + y \sin t = 1$ admet comme solution particulière $y_p = \sin t$.

La solution de l'équation homogène associée $y' \cos t + y \sin t = 0$ est $y_h = \lambda \cos t, \lambda \in \mathbb{R}$.

Alors la solution générale de $y' \cos t + y \sin t = 1$ est

$$y = \sin t + \lambda \cos t, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$



■

2.6.1 Méthode de la variation de la constante

Si aucune solution évidente de $a(t)\, y' + b(t)\, y = c(t)$ n'apparaît, on peut utiliser la méthode dite de *variation de la constante*, c'est-à-dire que l'on cherche la solution générale sous la forme $y = C(t)\ e^{-\int g(t)dt}$, $g(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$, où $t \mapsto C(t)$ est une nouvelle fonction inconnue de t. Il vient

$$a(t)\left(C'(t)\ e^{-\int g(t)dt} - C(t)\,\frac{b(t)}{a(t)}\, e^{-\int g(t)dt}\right) + b(t)\, C(t)\ e^{-\int g(t)dt} = c(t),$$

et donc

$$C'(t) = \frac{c(t)}{a(t)} e^{\int g(t)dt}, \quad g(t) = \frac{b(t)}{a(t)},$$

ce qui permet, en intégrant de trouver $C(t)$.

Exemple 26

Soit l'équation $(t^2+1)\, y' + 3ty = t^2$.

L'équation sans second membre (homogène) associée est $(t^2+1)\, y' + 3ty = 0$. C'est une équation à variables séparables. Sa solution générale est $y = C \cdot (t^2+1)^{-\frac{3}{2}}$.

Cherchons la solution générale de l'équation non homogène sous la forme $y = C(t)\left(t^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}$, où $t \mapsto C(t)$ est une fonction inconnue de t. En portant dans l'équation non homogène, on trouve

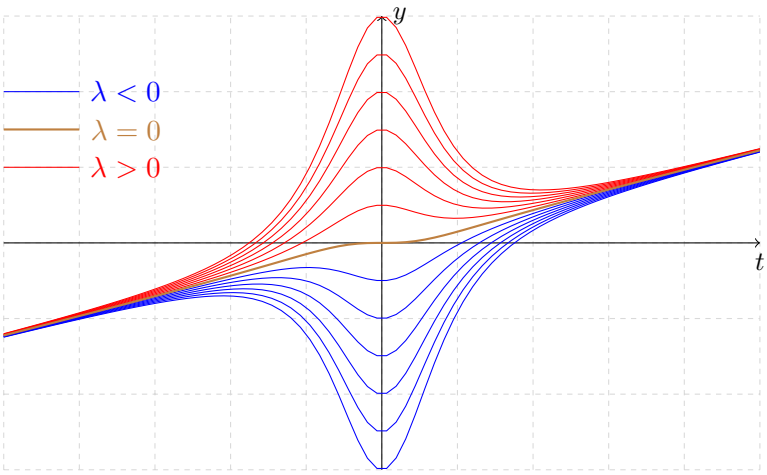
$$\left(t^2+1\right)\left(C'(t)\left(t^2+1\right)^{-\frac{3}{2}} + C(t)(-3t)\left(t^2+1\right)^{-\frac{5}{2}}\right) + 3tC(t)\left(t^2+1\right)^{-\frac{3}{2}} = t^2.$$

Après simplification on obtient

$$C'(t) = t^2\sqrt{t^2+1}.$$

Si on pose $t = \operatorname{Sh} u$, on trouve

$$C(t) = \frac{t}{8}\left(2t^2+1\right)\sqrt{t^2+1} - \frac{1}{8}\operatorname{Argsh} t + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}.$$



La solution générale est donc

$$y = \lambda\left(t^2+1\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{t}{8}\frac{2t^2+1}{t^2+1} - \frac{1}{8}\left(t^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\operatorname{Argsh} t, \lambda \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

2.6.2 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Une équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficient constant est une équation de la forme

$$y'(t) + ay(t) = b(t), \tag{2.5}$$

c'est le coefficient de y qui est constant.

Dans ce cas la solution générale de l'équation homogène associée $y'(t) + ay(t) = 0$ est

$$y_h = C\,e^{-at},\ C \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière peut être déduite à partir de la méthode de variation de la constante exposée précédemment

$$y_p = e^{-at}\int e^{at}b(t)\,dt.$$

Alors la solution générale de l'équation non homogène (2.5) est

$$y = y_h + y_p = C\,e^{-at} + e^{-at}\int e^{at}b(t)\,dt,\ C \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière pour des seconds membres $b(t)$ spécifiques

La méthode de variation des constantes marche toujours ; cependant, dans bien des cas, il existe une solution particulière y_p qui "ressemble" à $b(t)$. Le type de la fonction $b(t)$ nous indique sous quelle forme la chercher, et il ne reste plus qu'à ajuster les coefficients. Cela conduit en général à des calculs plus simple que la méthode de variation de la constante. Les exemples ci-dessous montrent comment s'y prendre pour trouver une telle solution particulière.

- Si $b(t)$ est un polynôme de degré n :

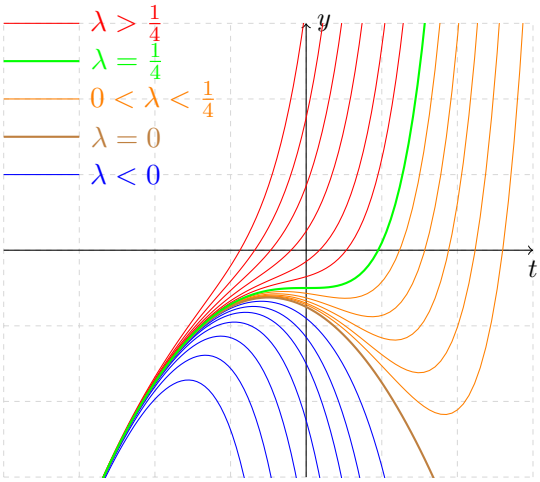
  Chercher une solution qui soit un polynôme de degré n.

Exemple 27

Cherchons une solution de l'équation

$$y' - 2y = t^2 + 1.$$

Posons $y_p = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ et remplaçons dans l'équation : $2\alpha t + \beta - 2(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) = t^2 + 1$. En identifiant, on trouve alors $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}, \gamma = -\frac{3}{4}$. Une solution particulière est donc $y_p = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}$. D'où la solution générale est $y = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + \lambda e^{2t}, \lambda \in \mathbb{R}$.



- Si $b(t)$ est de la forme ce^{rt}, avec r différent de $-a$:

  Chercher une solution de la forme αe^{rt}.

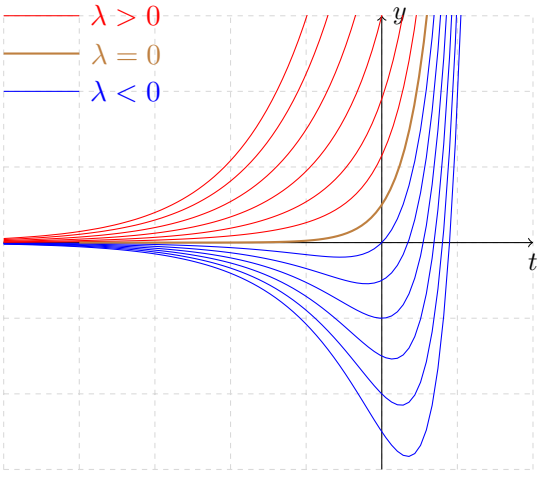
Exemple 28

Cherchons une solution de l'équation

$$y' - y = e^{3t}.$$

Posons $y_p = \alpha e^{3t}$ et remplaçons dans l'équation : $3\alpha e^{3t} - \alpha e^{3t} = e^{3t}$, et donc $\alpha = \frac{1}{2}$. Une solution particulière est alors $y_p = \frac{1}{2}e^{3t}$. D'où la solution générale est

$$y = \frac{1}{2}e^{3t} + \lambda e^t, \lambda \in \mathbb{R}.$$



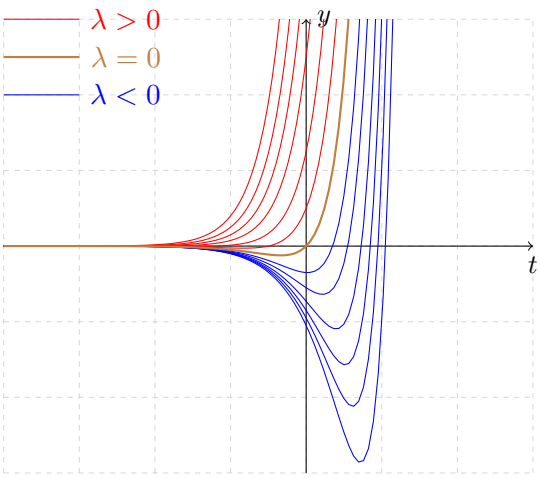
- Si $b(t)$ est de la forme ce^{-at} :

  Chercher une solution de la forme $\alpha t e^{-at}$.

Exemple 29

Cherchons une solution de l'équation

$$y' - 3y = e^{3t}.$$



Posons $y_p = \alpha t e^{3t}$ et remplaçons dans l'équation : $3\alpha t e^{3t} + \alpha e^{3t} - 3\alpha t e^{3t} = e^{3t}$, donc $\alpha = 1$. Une solution particulière est donc $y_p = te^{3t}$. D'où la solution générale

$$y = (t + \lambda)\, e^{3t}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

■

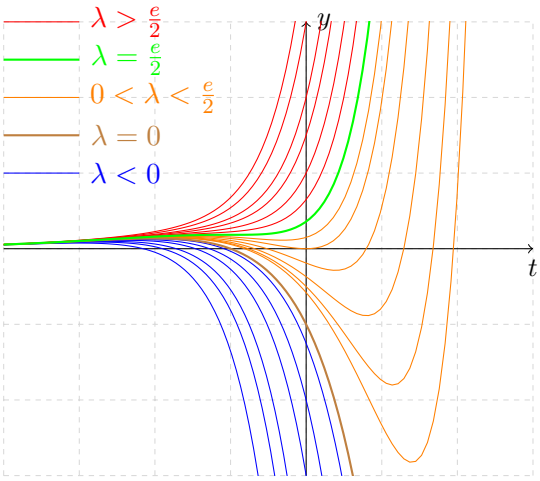
- Si $b(t)$ est de la forme $p(t)\, e^{rt}$, où p est un polynôme de degré n :

  Chercher une solution de la forme $q(t)\, e^{rt}$, où q est un polynôme de degré n si $r \neq -a$, et de degré $n+1$ si $r = -a$.

Exemple 30

Cherchons une solution de l'équation $y' - 2y = te^t$. Posons $y_p = (\alpha t + \beta)\, e^t$ et remplaçons dans l'équation

$$(\alpha t + \beta)\, e^t + \alpha e^t - 2(\alpha t + \beta)\, e^t = te^t.$$



En identifiant, on trouve $\alpha = \beta = -1$. Une solution particulière est donc $y_p = -(t+1)\, e^t$. D'où la solution générale est

$$y = -(t+1)\, e^t + \lambda e^{2t}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

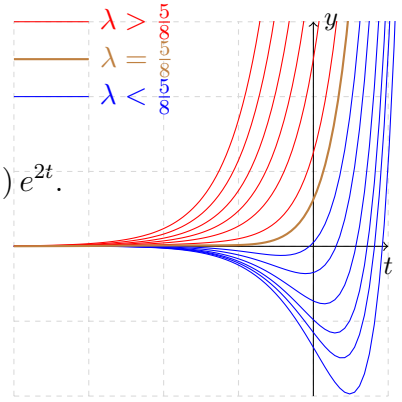
■

Exemple 31

Cherchons une solution de l'équation $y' - 2y = (t+1)\, e^{2t}$.

Posons $y_p = (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)\, e^{2t}$ et remplaçons dans l'équation :

$$2\left(\alpha t^2 + \beta t + \gamma\right) e^{2t} + (2\alpha t + \beta)\, e^{2t} - 2\left(\alpha t^2 + \beta t + \gamma\right) e^{2t} = (t+1)\, e^{2t}.$$



En identifiant, on trouve $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$ et γ est quelconque. Une solution particulière est donc $y_p = \left(\frac{1}{2}t^2 + t + \gamma\right) e^{2t}$. D'où la solution générale est $y = \left(\frac{1}{2}t^2 + t + \lambda\right) e^{2t}, \lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $b(t)$ est de la forme $c\cos(rt) + d\sin(rt)$:

  Chercher une solution de la forme $\alpha\cos(rt) + \beta\sin(rt)$.

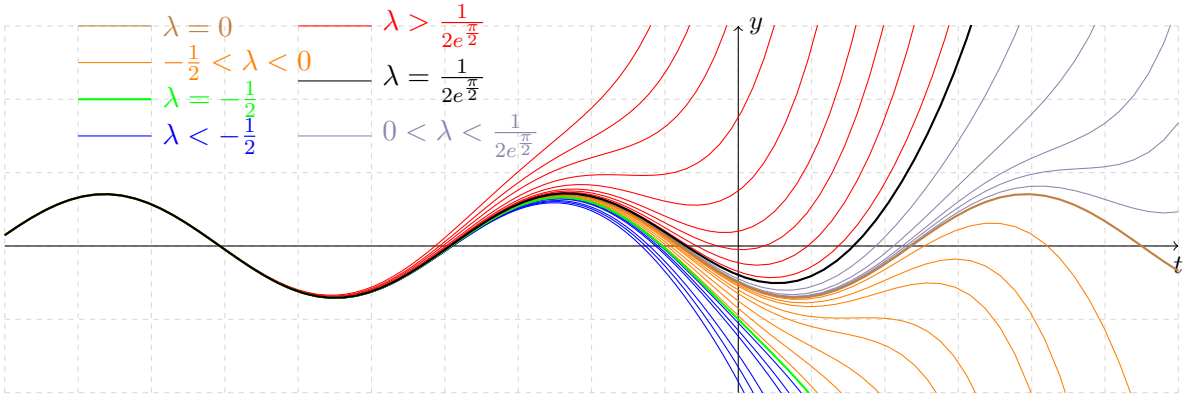
Exemple 32

Cherchons une solution de l'équation $y' - y = \sin t$.

Posons $y_p = \alpha\cos t + \beta\sin t$ et remplaçons dans l'équation :

$$-\alpha\sin t + \beta\cos t - (\alpha\cos t + \beta\sin t) = \sin t.$$

En identifiant, on trouve $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$. Une solution particulière est donc $y_p = -\frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$.
D'où la solution générale est $y = -\frac{1}{2}(\cos t + \sin t) + \lambda e^t, \lambda \in \mathbb{R}$.



- Si $b(t)$ est la somme de plusieurs fonctions $b_1(t), \cdots, b_k(t)$ qui sont chacune d'un des types ci-dessus :

  Chercher pour i de 1 à k une solution particulière $s_i(t)$ de chacune des équations $y' + ay = b_i(t)$. La fonction $s_1(t) + \cdots + s_k(t)$ sera solution particulière de $y' + ay = b(t)$.

Exemple 33

Cherchons une solution de l'équation

$$y' - y = 2t + \sin t.$$

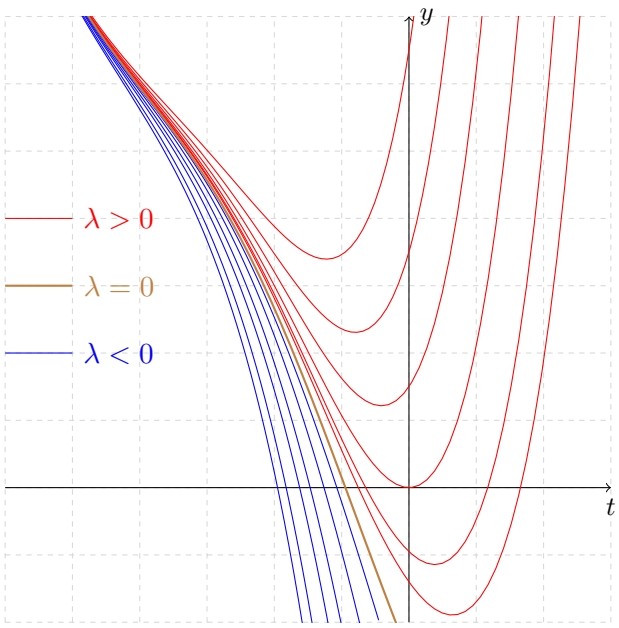
Une solution particulière de $y' - y = 2t$ est $y_{p_1} = -2t - 2$.

Une solution particulière de $y' - y = \sin t$ est $y_{p_2} = -\frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$.

Donc $y_p = -2(t+1) - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$ est solution particulière de $y' - y = 2t + \sin t$.

Sa solution générale est donc

$$y = -2(t+1) - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t) + \lambda e^t, \lambda \in \mathbb{R}.$$



■

Résumons les cas ci-dessus dans le tableau suivant.

Second membre $b(t)$	**Solution particulière** $y_p(t)$
$b(t)$ est un polynôme de degré n	$y_p(t)$ est un polynôme de degré n
$b(t) = ce^{rt}$, avec $r \neq -a$	$y_p(t) = \alpha e^{rt}$
$b(t) = ce^{-at}$	$y_p(t) = \alpha t e^{-at}$.
$b(t) = p(t)\, e^{rt}, r \neq -a$, p polynôme de degré n	$y_p(t) = q(t)\, e^{rt}$, q polynôme de degré n
$b(t) = p(t)\, e^{rt}, r = -a$, p polynôme de degré n	$y_p(t) = q(t)\, e^{rt}$, q polynôme de degré $n+1$
$b(t) = c\cos(rt) + d\sin(rt)$	$y_p(t) = \alpha\cos(rt) + \beta\sin(rt)$

2.7 Autres types d'équations différentielles

2.7.1 Équation de Bernoulli

Une équation différentielle de Bernoulli est une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$y' = a(t)\, y + b(t)\, y^m, \tag{2.6}$$

où m est différent de 0 et 1 et où a et b sont des applications définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. En général, m est un entier naturel, mais on peut prendre m réel à condition de chercher y à valeurs strictement positives. En général, a et b sont des fonctions continues.

Exemple 34

$ty' + y - y^2 \operatorname{Log} t = 0$ et $t^2y' + y = t\sqrt{y}$ sont des équations différentielles de Bernoulli. ∎

Méthode de résolution

Les cas particuliers $m = 0$ et $m = 1$ donnent des équations linéaires, qui ont déjà été traités ci-dessus.

Le principe de la méthode, si $m \neq 1$ et $m \neq 0$, est de diviser les deux membres de (2.6) par y^m. On obtient alors

$$\frac{y'}{y^m} - a(t)\frac{1}{y^{m-1}} = b(t).$$

On effectue un changement de fonction en posant $z = \frac{1}{y^{m-1}}$, il vient donc $\frac{1}{1-m}z' - a(t)z = b(t)$, alors z est la solution d'une équation linéaire du premier ordre. On la résout et on en déduit une expression de y.

Exemple 35

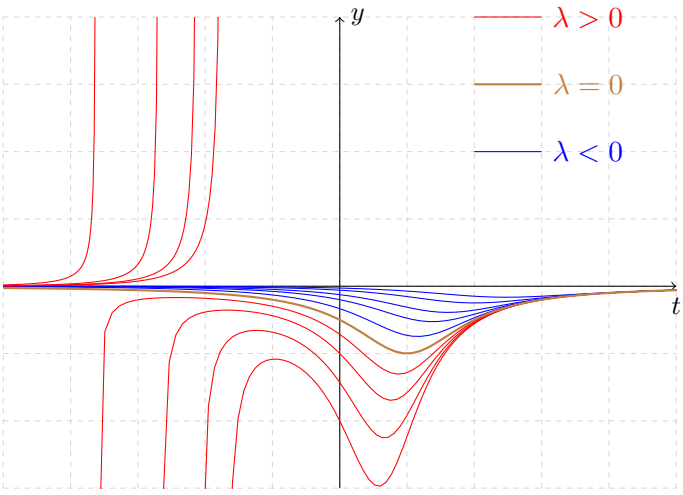
$(m = 2)$: $y' = y + t^2y^2$ on divise par y^3, et cela donne $\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{y} = t^2$. En posant $z = \frac{1}{y}$ on obtient $z' + z = -t^2$ équation linéaire.

La solution de l'équation homogène associée est $z_h = \lambda e^{-t}, \lambda \in \mathbb{R}$. Avec la méthode de la variation de la constante on trouve

$$z(t) = \lambda e^{-t} - t^2 + 2t - 2, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$y(t) = \frac{1}{\lambda e^{-t} - t^2 + 2t - 2}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$



∎

2.7.2 Équation de Riccati

Une équation différentielle de Riccati est une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$y' = a(t)\, y^2 + b(t)\, y + c(t)\,, \tag{2.7}$$

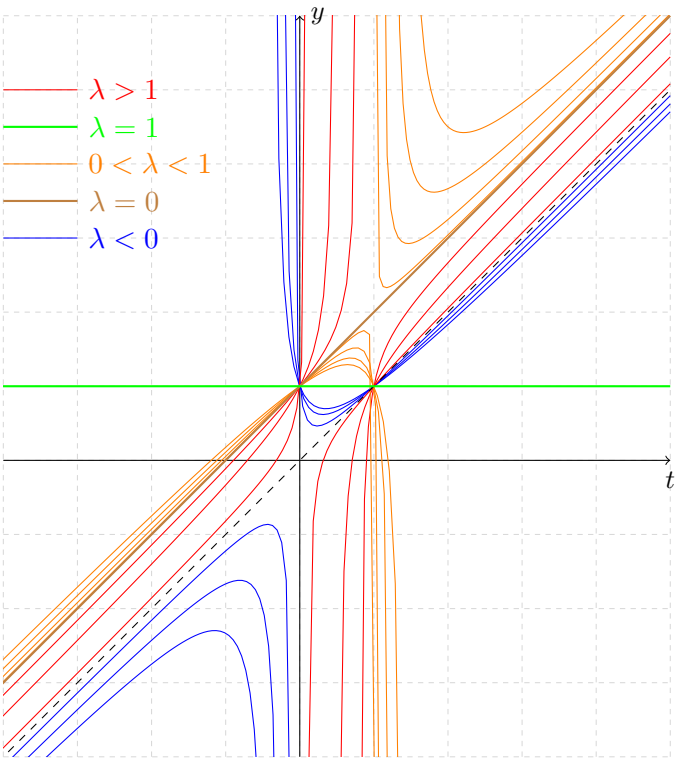
où a, b et c sont trois fonctions, souvent choisies continues sur un intervalle commun I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

L'intégration d'une équation différentielle de Riccati nécessite la connaissance d'une solution particulière de cette équation.

Méthode de résolution

On suppose comme solution particulière y_1 et on pose $y = z + y_1$. En remplaçant y par sa valeur dans (2.7) on trouve $z' = a(t)\, z^2 + (2a(t)\, y_1 + b(t))\, z$, a,b et c sont des fonctions continues sur l'ouvert I. Donc z est solution d'une équation de Bernoulli, qui a déjà été traité ci-dessus.

Exemple 36



L'équation différentielle

$$t(t-1)\, y' + y^2 - (2t+1)\, y = -2t,$$

est une équation de Riccati avec

$$a(t) = \tfrac{-1}{t(t-1)}, b(t) = \tfrac{2t+1}{t(t-1)} \text{ et } c(t) = \tfrac{2}{1-t}.$$

Notons que $y_1 = t$ est solution particulière. En posant $y = t + z$ il vient $t(t-1)\, z' - z + z^2 = 0$. En divisant par $t(t-1)$ on obtient une équation de Bernoulli avec $m = 2$,

$$z' = \tfrac{1}{t(t-1)} z - \tfrac{1}{t(t-1)} z^2,$$

d'où $z(t) = \dfrac{t-1}{\lambda t - 1}$, donc

$$y(t) = t + \frac{t-1}{\lambda t - 1},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

■

2.7.3 Équations différentielles de Lagrange et Clairaut

Les équations de Lagrange sont les équations qui peuvent se mettre sous la forme

$$y = a\left(y'\right) \cdot t + b\left(y'\right),$$

où a et b sont des fonctions dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

L'équation de Clairaut est un cas particulier de l'équation de Lagrange ($a\left(y'\right) = y'$) :

$$y = ty' + b\left(y'\right).$$

Pour résoudre ce type d'équation on pose $y' = s$ ou $\dfrac{dy}{dt} = s$ et on cherche une expression pour $\dfrac{dy}{dt}$. On a $y = a\left(y'\right) \cdot t + b\left(y'\right) = a\left(s\right) t + b\left(s\right)$ donc $\frac{dy}{dt} = a\left(s\right) + t\frac{d}{dt}a\left(s\right) + \frac{d}{dt}b\left(s\right)$ d'où

$$\frac{dy}{dt} = a\left(s\right) + t\frac{d}{ds}a\left(s\right)\frac{ds}{dt} + \frac{d}{ds}b\left(s\right)\frac{ds}{dt} = a\left(s\right) + ta'\left(s\right)\frac{ds}{dt} + b'\left(s\right)\frac{ds}{dt}.$$

Comme $\dfrac{dy}{dt} = s$, alors

$$a\left(s\right) + ta'\left(s\right)\frac{ds}{dt} + b'\left(s\right)\frac{ds}{dt} = s$$

qui est une équation différentielle pour l'inconnue $t\left(s\right)$.

Une fois $t\left(s\right)$ obtenu, on trouve $y\left(s\right) = a\left(s\right)t\left(s\right) + b\left(s\right)$. On a donc un paramétrage des courbes intégrales.

Exemple 37

Soit l'équation $y = ty' + \left(y'\right)^2 + 1$.

On pose $y' = s$ ou $\frac{dy}{dt} = s$, alors $y = ts + s^2 + 1$ et $\frac{dy}{dt} = s + t\frac{ds}{dt} + 2s\frac{ds}{dt}$.

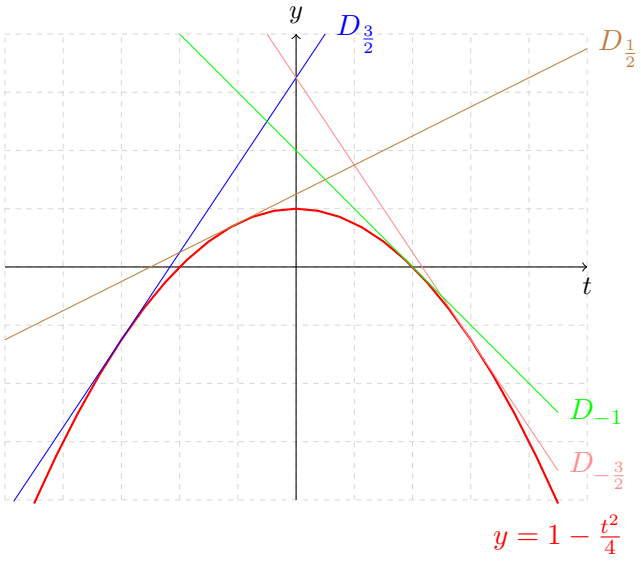
Comme $\frac{dy}{dt} = s$, alors $s + t\frac{ds}{dt} + 2s\frac{ds}{dt} = s$, d'où $\left(t + 2s\right)\frac{ds}{dt} = 0$.

On a donc soit $t + 2s = 0$ soit $\frac{ds}{dt} = 0$.

Si $t + 2s = 0$ alors $(t, y) = (-2s, -s^2 + 1)$, d'où $y = -\frac{t^2}{4} + 1$ parabole (solution singulière en rouge).

Si $\frac{ds}{dt} = 0$, alors $s =$constante$= \lambda$ et donc $y = \lambda t + \lambda^2 + 1$ famille de droites (D_λ).

On peut montrer que l'ensemble des droites (D_λ) est l'ensemble des tangentes à la parabole. La parabole est l'enveloppe des droites (D_λ).



■

2.8 Équations différentielles et familles de courbes

2.8.1 Équation différentielle associée à une famille de courbes

On considère l'équation $\phi(t, y, \lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$, d'une famille de courbes Γ_λ. En dérivant cette équation par rapport à t, on obtient

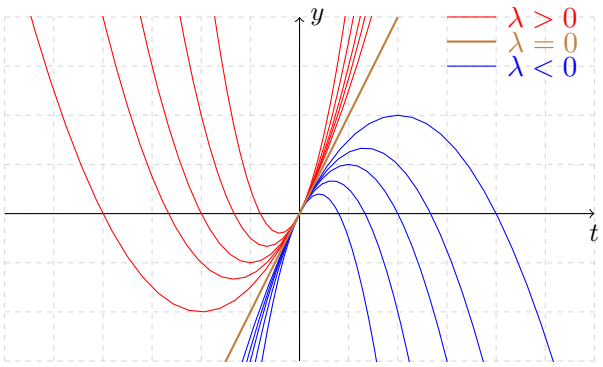
$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, y, \lambda) + y' \frac{\partial \phi}{\partial y}(t, y, \lambda) = 0.$$

On essaie d'éliminer λ entre les deux équations précédentes pour obtenir une équation ne faisant plus intervenir que $t, y, y' : F(t, y, y') = 0$ qui est l'équation différentielle de la famille de courbes Γ_λ.

Exemple 38

Cherchons l'équation différentielle de la famille de paraboles $y = \lambda t^2 + 2t, \ \lambda \in \mathbb{R}$. On a $y' = 2\lambda t + 2$. En éliminant λ entre les deux équations $\lambda = \frac{y-2t}{t^2} = \frac{y'-2}{2t}$, on obtient

$$ty' = 2y - 2t.$$

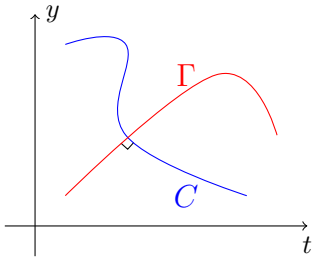


■

2.8.2 Trajectoires orthogonales à une famille de courbes

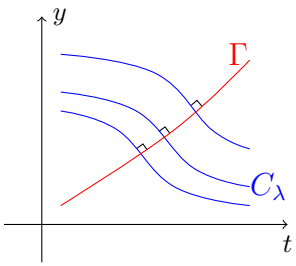
Définition 22 (Courbes orthogonales)

Deux courbes sont *orthogonales* si elles se coupent et que leurs tangentes aux points d'intersection sont perpendiculaires. Notons que le produit des pentes de ces tangentes vaut alors -1.



Définition 23 (Trajectoire orthogonale)

On appelle *trajectoire orthogonale* de la famille de courbes (C_λ) une courbe Γ telle qu'en chacun de ses points il passe une courbe C_λ orthogonale à Γ.



Notons que, si $F(t, y, y') = 0$ est l'équation différentielle de la famille (C_λ), alors celle des trajectoires orthogonales est de la forme $F\left(t, y, \frac{-1}{y'}\right) = 0$.

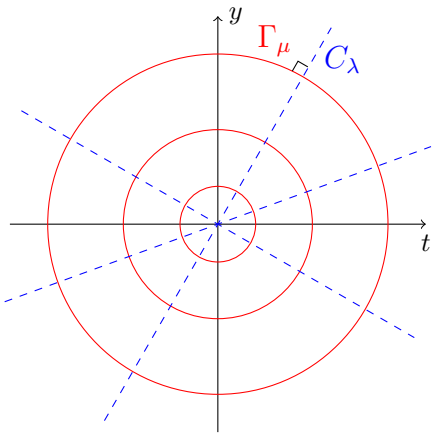
Exemple 39

Cherchons les trajectoires orthogonales des droites passant par l'origine.

Cherchons tout d'abord l'équation différentielle de la famille de droites $C_\lambda : y = \lambda t,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

On a $y' = \lambda$, donc $y = y't$. Alors l'équation différentielle des trajectoires orthogonales est $y = \left(\frac{-1}{y'}\right) t$ ou bien $yy' = -t$, qui s'intègre en $t^2 + y^2 = K$.

On obtient des courbes lorsque $K = \mu^2$ c'est-à-dire $\Gamma_\mu : t^2 + y^2 = \mu^2,\ \mu \in \mathbb{R}_+^*$, qui sont des cercles centrés à l'origine.



■

2.9 Exercices

Exercice 2.1

(*Variables séparées*) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' = y^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, **b)** $y' = (1 - y)\, y$, **c)** $y' = \operatorname{tg}(t)\, y,\ y(0) = 1$,

d) $y' = \frac{\pi}{4} \cos(t)\,(1 + y^2)$, **e)** $y' = t\sqrt{1 - y^2}$, **f)** $t^3 y' \sin y = 2,\ \lim_{t \to +\infty} y(t) = \frac{\pi}{2}$,

g) $y'\sqrt{1 - t^2} + ty = 0$, **h)** $(1 - y^2)\, y' = y$, **I)** $ty' + y \operatorname{Log} y = 0,\ y(1) = 1$.

Exercice 2.2

(*Équations type-homogènes*) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $4yy' + t = 0$, **b)** $(t - y)\, y' + 2t + 3y = 0$, **c)** $t^2 y' = y^2$,

d) $ty' = y - t$, **e)** $ty' = y + \sqrt{y^2 - t^2}$, **f)** $ty' = y + t \cos^2 \frac{y}{t}$.

Exercice 2.3

(Équations aux différentielles totales, facteur intégrant) Intégrer les équations différentielles suivantes :

a) $(t^2y + y^3)\,y' + t^3 + ty^2 = 0$, **b)** $y\,(t^2 + 2y^2)\,y' + t\,(2t^2 + y^2) = 0$,

c) $2tyy' = t + y^2,\ \mu\,(t, y) = \varphi\,(t)$ **d)** $(t + 4ty + 5y^2)\,y' + 3t + 2y + y^2,\ \mu\,(t, y) = \varphi\,(t + y^2)$.

Exercice 2.4

(Équations différentielles linéaires) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' + y = \cos t$, **b)** $y' + 2ty = 4t$, **c)** $y' - y = te^t$,

d) $y' - 2ty = 2te^{t^2}$, **e)** $(t - 2)\,y' = y + 2\,(t - 2)^2$, **f)** $(1 + t^2)\,y' = 2ty + 5\,(1 + t^2)$,

g) $y' + y = e^{-t},\ y\,(0) = 0$, **h)** $2ty' + y = 1,\ y\,(1) = 2$, **I)** $y' \cos t - y \sin t = 2t,\ y\,(0) = 0$.

Exercice 2.5

(Équations de Bernoulli, Riccati et Lagrange) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $ty' + y = t^2y^2$, **d)** $y' + \frac{1}{t}y = y^2 - \frac{1}{t^2}$, **g)** $y = ty' - (y')^3$,

b) $y' = y - \sqrt{y}$, **e)** $y' = y^2 + ty + 1$, **h)** $y = t\,(1 + y') - (y')^2$,

c) $(t^3 + 1)\,y' = 3t^2y - ty^3$, **f)** $(t^3 - 1)\,y' = y^2 + t^2y - 2t$.

Exercice 2.6

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' - \left(2t - \dfrac{1}{t}\right) y = 1$, **c)** $y' - y = t^k e^t, k \in \mathbb{N}$, **c)** $t\,(1 + \mathrm{Log}^{\,2} t)\,y' + 2\,(\mathrm{Log}\, t)\,y = 1$,

d) $ty' + y - ty^3 = 0$, **e)** $t^2\,(y^2 + y') = ty - 1$, **f)** $t^2y' = t^2y^2 + ty + 1$,

g) $y = \frac{3}{2}ty' + e^{y'}$, **h)** $y = (y' - 1)\,e^{y'}$, **i)** $ty' = t^2 + y$,

j) $(t^3 + e^y)\,y' = 3t^2$, **k)** $ty' = y - t$, **l)** $y' \sin t = y\,\mathrm{Log}\, y$.

Exercice 2.7

Déterminer, sans résoudre l'équation, le lieu des extrema des solutions de $y' = ty - 1$.

Dans quelle région du plan sont-elles croissantes, décroissantes ?

Exercice 2.8

On considère la famille de courbes (C_λ) d'équation générale $t^2 + 3y^2 - 3 = \lambda y,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

a) Préciser la nature des courbes (C_λ).

b) Déterminer l'équation différentielle pour cette famille.

c) En déduire l'équation différentielle de la famille de courbes orthogonales puis l'équation générale de ces courbes.

Exercice 2.9

Montrer que la substitution $y = \dfrac{s}{t}$ réduit l'équation différentielle $(1 - ty)\, y = t\,(1 + ty)\, y'$ à une équation à variables séparables. Résoudre cette équation.

Exercice 2.10

On s'intéresse à l'évolution d'une population. Soient $y\,(t)$ le nombre d'individus de cette population et $k\,(t) = \dfrac{y'\,(t)}{y\,(t)}$ le taux de croissance de cette population au temps t. Étudier l'évolution de cette population au cours du temps dans les cas suivants :

a) k est constant.

b) $k = y$. Montrer alors que la solution explose en temps fini.

c) $k = a - by$. Montrer que y converge.

2.10 Solution des exercices sélectionnés

Solution de l'exercice 2.1.

a) $y' = y^\alpha$ ou $\dfrac{dy}{dt} = y^\alpha$. La fonction nulle lorsque $\alpha \geq 0$ est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\dfrac{dy}{y^\alpha} = dt$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient

$$\alpha = 1 : \quad \operatorname{Log}|y\,(t)| = t + K,\ \text{avec } K \in \mathbb{R}, \text{ ou bien } y = Ce^t,\ \ C \in \mathbb{R},$$

$$\alpha \neq 1 : \quad \tfrac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha} = t + K,\ \text{avec } K \in \mathbb{R}, \text{ ou bien } y = \left((1-\alpha)\, t + C\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},\ \ C \in \mathbb{R}.$$

b) $y' = (1 - y)\, y$, ou $\dfrac{dy}{dt} = (1 - y)\, y$, que l'on peut écrire $\dfrac{dy}{(1-y)\, y} = dt$ ou $\dfrac{dy}{1-y} + \dfrac{dy}{y} = dt$. En intégrant $\displaystyle\int \frac{dy}{1-y} + \int \frac{dy}{y} = \int dt$ on trouve $-\operatorname{Log}|1-y| + \operatorname{Log}|y| = t + C$ ou beaucoup mieux

$$\operatorname{Log}\left|\frac{y}{1-y}\right| = t + C.$$

Finalement, on trouve les courbes intégrales

$$\frac{y}{1-y} = \lambda e^t,\ \lambda = \pm e^C \in \mathbb{R} \ \text{ ou bien } \quad y = \frac{\lambda e^t}{1 + \lambda e^t},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

e) $y' = t\sqrt{1-y^2}$. Les fonctions constantes $y \equiv 1$ et $y \equiv -1$ sont des solutions. Les autres s'obtiennent en écrivant $\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = tdt$. On intègre alors $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int tdt$ ce qui donne $\operatorname{Arcsin} y = \frac{1}{2}t^2 + \lambda$ ou beaucoup mieux

$$y = \sin\left(\frac{1}{2}t^2 + \lambda\right),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 2.2.

a) Cette équation s'écrit sous forme $y' = \dfrac{-1}{4\dfrac{y}{t}}$ qui est de *type-homogène*. On pose alors $s = \frac{y}{t}$ ou $y = st$ et donc $y' = \frac{dy}{dt} = s + t\frac{ds}{dt} = \dfrac{-1}{4s}$, qui est équivalente à $\dfrac{4s}{4s^2+1}ds = -\dfrac{1}{t}dt$ si $s^2 \neq \dfrac{1}{4}$. C'est une équation à variables séparées, qui donne en intégrant

$$\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(4s^2+1\right) = -\operatorname{Log}|t| + K, K \in \mathbb{R} \text{ ou bien } \operatorname{Log}\left(t^2\left(4s^2+1\right)\right) = 2K,$$

ou encore

$$s = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda^2}{t^2} - 1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Finalement, on trouve

$$y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - t^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

De plus si $s^2 = \dfrac{1}{4}$ donne $\bar{y}_1 = \dfrac{1}{2}t$, et $\bar{y}_2 = \dfrac{1}{2}t$ sont des solutions singulières.

c) L'équation $t^2y' = y^2$ peut s'écrire sous la forme $y' = \left(\dfrac{y}{t}\right)^2$. En posant $s = \dfrac{y}{t}$ ou $y = st$ et donc $y' = \dfrac{dy}{dt} = s + t\dfrac{ds}{dt} = s^2$, qui est équivalente à $\dfrac{ds}{s^2-s} = \dfrac{dt}{t}$ si $s^2 - s \neq 0$. C'est une équation à variables séparées, qui donne en intégrant

$$\operatorname{Log}\left|\frac{s-1}{s}\right| = \operatorname{Log}|t| + K, K \in \mathbb{R} \text{ ou bien } \frac{s-1}{s} = \lambda t, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$s = \frac{1}{1-\lambda t}.$$

Finalement, on trouve

$$y = \frac{t}{1-\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si $s^2 - s = 0$ alors $s = 0$ ou $s = 1$ qui donne

$$\bar{y}_1 = 0.$$

Solution de l'exercice 2.4.

a) L'équation différentielle $y' + y = \cos t$, est à coefficients constants, avec second membre. L'équation homogène associée est $y' + y = 0$. La fonction nulle est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\frac{y'}{y} = -1$ ou $\frac{dy}{y} = -dt$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient $\text{Log}\,|y(t)| = -t + K$, avec $K \in \mathbb{R}$, ou bien

$$y_h = \lambda e^{-t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il y a ensuite plusieurs méthodes pour rechercher une solution particulière. Par exemple, on peut chercher une solution particulière de l'équation $y' + y = \cos t$ sous la forme

$$y_p = a\cos t + b\sin t.$$

Alors y_p est une solution de l'équation si et seulement si

$$(-a\sin t + b\cos t) + (a\cos t + b\sin t) = \cos t, \text{ ou bien } \quad (b+a)\cos t + (b-a)\sin t = \cos t.$$

Par identification, on trouve que a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} b + a = 1 \\ b - a = 0 \end{cases},$$

ce qui donne

$$a = b = \frac{1}{2}.$$

Donc une solution particulière est donné par

$$y_p = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t.$$

La solution générale de l'équation différentielle $y' + y = \cos t$ est donné par

$$y = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t + \lambda e^{-t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) L'équation différentielle $y' + 2ty = 4t$, est à coefficients non constants, avec second membre. L'équation homogène associée est $y' + 2ty = 0$. La fonction nulle est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\frac{y'}{y} = -2t$ ou $\frac{dy}{y} = -2tdt$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient $\text{Log}\,|y(t)| = -t^2 + K$, avec $K \in \mathbb{R}$, ou bien $y = Ce^{-t^2}$, $C \in \mathbb{R}$. On peut utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire, on cherche la solution générale sous la forme $y = C(t)\, e^{-t^2}$. Il vient

$$C'(t)\, e^{-t^2} - 2te^{-t^2}C(t) + 2tC(t)\, e^{-t^2} = 4t,$$

et donc $C'(t) = 4te^{t^2}$, ce qui permet, en intégrant de trouver

$$C(t) = 2e^{t^2}.$$

La solution générale de l'équation $y' + 2ty = 4t$ est donc

$$y = \lambda e^{-t^2} + 2 \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) L'équation différentielle $y' - y = te^t$, est à coefficients constants, avec second membre. On résout d'abord l'équation sans second membre $y' - y = 0$ qui donne

$$y_h = \lambda e^t \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution de l'équation $y' - y = te^t$, sous la forme

$$y_p = \left(at^2 + bt + c\right) e^t$$

Puisque dans ce cas $y_p' = \left(at^2 + (2a + b)\, t + b + c\right) e^t$, on trouve que y_p est solution de l'équation si et seulement si,

$$\left(at^2 + (2a + b)\, t + b + c\right) e^t - \left(at^2 + bt + c\right) e^t = te^t$$

ou bien

$$(2at + b)\, e^t = te^t.$$

Par identification, on trouve que $a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$. Donc la solution générale de l'équation $y' - y = te^t$ est

$$y = \left(\frac{1}{2}t^2 + \lambda\right) e^t \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 2.5.

a) $ty' + y = t^2y^2$ est une équation de Bernoulli pour $m = 2$. On divise les deux membres de l'équation par y^2,

$$t\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = t^2.$$

On fait le changement de variables $z = \dfrac{1}{y}$, $z' = -\dfrac{y'}{y^2}$. On remplace dans l'équation différentielle

$$-tz' + z = t^2,$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants.

L'équation homogène associée est $-tz' + z = 0$ dont la solution $z = Ct, C \in \mathbb{R}$.

On utilise la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière, c'est-à-dire, on cherche la solution générale sous la forme $z = C(t)\ t$. Il vient

$$-t\left(C'(t)\ t + C(t)\right) + C(t)\ t = t^2,$$

et donc $C'(t) = -1$, ce qui permet, en intégrant de trouver

$$C(t) = -t.$$

La solution générale de l'équation $-tz' + z = t^2$ est donc

$$z = \lambda t - t^2 \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de l'équation différentielle $ty' + y = t^2y^2$ est alors

$$y = \frac{1}{\lambda t - t^2} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } y \equiv 0.$$

d) $y' + \frac{1}{t}y = y^2 - \frac{1}{t^2}$ est une équation de Riccati. Notons que $y_1 = \dfrac{1}{t}$ est solution particulière. En posant $y = \dfrac{1}{t} + z$ il vient

$$z' = \frac{1}{t}z + z^2,$$

qui est une équation de Bernoulli pour $m = 2$ que l'on sait résoudre en posant $w = \dfrac{1}{z}$,

$$w' + \frac{1}{t}w = -1,$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants.
L'équation homogène associée est $w' + \dfrac{1}{t}w == 0$ dont la solution $w = \dfrac{C}{t}, C \in \mathbb{R}$.
On utilise la méthode de la variation de la constante, c'est-à-dire, on cherche la solution générale sous la forme $w = \dfrac{C(t)}{t}$. Il vient

$$\left(\frac{C'(t)}{t} - \frac{1}{t^2}C(t)\right) + \frac{1}{t}\frac{C(t)}{t} = -1,$$

et donc $C'(t) = -t$, ce qui permet, en intégrant de trouver

$$C(t) = -\frac{1}{2}t^2.$$

La solution générale de l'équation $w' + \dfrac{1}{t}w = -1$ est donc

$$w = \frac{K}{t} - \frac{1}{2}t, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de l'équation différentielle $z' = \dfrac{1}{t}z + z^2$ est alors

$$z = \frac{2t}{2K - t^2} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

Ainsi la solution générale de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{t}y = y^2 - \frac{1}{t^2}$ est

$$y = \frac{1}{t} + \frac{2t}{\lambda - t^2},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 3

Équations différentielles du second ordre

Sommaire

3.1 Équations différentielles du second ordre incomplètes 39

3.1.1 Équations du type $y'' = f(t, y')$ 39

3.1.2 Équations du type $y'' = f(y, y')$ 39

3.1.3 Équations du type $y'' = f(y)$ 40

3.2 Équations différentielles type-homogènes du second ordre 41

3.3 Équations différentielles linéaires du second ordre 41

3.3.1 Équations linéaires homogènes du second ordre 42

3.3.2 Équations linéaires non homogènes du second ordre 43

3.4 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants 45

3.4.1 Recherche d'une solution particulière pour des seconds membres spécifiques 46

3.4.2 Solution particulière par la méthode de variation des constantes . . . 49

3.5 Équations linéaires homogènes à coefficients analytiques 50

3.5.1 Coefficients analytiques, points réguliers 52

3.5.2 Coefficients analytiques, points singuliers 54

3.6 Exercices 60

3.7 Solution des exercices sélectionnés 62

La forme générale d'une équation différentielle du second ordre est $F(t, y, y', y'') = 0$. Sa forme normale ou résolue s'écrit $y'' = f(t, y, y')$. Il existe très peu de cas où on sait résoudre explicitement une équation du second ordre : même les équations linéaires du second ordre sans second membre ne se résolvent pas explicitement en général.
La solution générale y dépend en général de deux paramètres $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ qui apparaissent le plus souvent comme des constantes d'intégration.

3.1 Équations différentielles du second ordre incomplètes

Ces équations se ramènent à des équations du premier ordre.

3.1.1 Équations du type $y'' = f(t, y')$

Si on considère la nouvelle fonction inconnue $v = y'$, l'équation $y'' = f(t, y')$ se ramène à l'équation du premier ordre $v' = f(t, v)$. La solution générale de cette dernière sera de la forme $v_\lambda(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et on obtient donc $y(t) = \int v_\lambda(t)\, dt + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exemple 40
Cherchons les solutions de l'équation $y'' = \frac{1}{t}y' + 3t$.
Posons $v = y'$ et remplaçons dans notre équation, on obtient $v' = \frac{1}{t}v + 3t$. En utilisant la méthode de variation de la constante on trouve $v(t) = 3t^2 + \lambda t$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Il vient $y(t) = t^3 + \lambda t^2 + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ∎

3.1.2 Équations du type $y'' = f(y, y')$

La méthode consiste à prendre y comme nouvelle variable et $v = y'$ comme variable fonction inconnue en la variable y, c'est-à-dire $v : y \mapsto v(y) = y'$.

Il peut y avoir des solutions constantes $y(t) = y_0$, auquel cas y ne peut être choisi comme variable. On a donc des solutions singulières $y(t) = y_j$ avec $f(y_j, 0) = 0$.

Dans le cas général, on a $y'' = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot v$.

L'équation $y'' = f(y, y')$ se ramène alors à l'équation du premier ordre $v\frac{dv}{dy} = f(y, v)$. La résolution de cette dernière donne une solution générale $v_\lambda(y), \lambda \in \mathbb{R}$. On doit ensuite résoudre $y' = v_\lambda(y)$ ou $\frac{dy}{v_\lambda(y)} = dt$. D'où la solution générale

$$\int \frac{dy}{v_\lambda(y)} = t + \mu, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 41

Cherchons les solutions de l'équation $y'' = 2yy'$.

Par le changement de fonction $v(y) = y'$, on a $y'' = v\frac{dv}{dy} = 2yv$ qui est une équation à variables séparées de fonction inconnue $v(y)$ ayant pour solution $v = y^2 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$. Ensuite, en résolvant l'équation $y' = y^2 + \lambda$, qui est une équation de Riccati, on trouve $y(t) = \lambda \operatorname{tg}(\lambda t + \mu)$ et $y(t) = -\lambda \coth(\lambda t + \mu)$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. De plus $y = \lambda$ sont des solutions singulières. ∎

3.1.3 Équations du type $y'' = f(y)$

C'est un cas particulier du cas précédent, mais on peut ici préciser davantage la méthode de résolution. On a en effet $y'y'' = y'f(y)$, et en intégrant il vient $\frac{1}{2}(y')^2 = \varphi(y) + \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}$, où φ est une primitive de f. On obtient donc

$$y' = \pm\sqrt{2(\varphi(y) + \lambda)} \ \text{ ou } \ \frac{dy}{\pm\sqrt{2(\varphi(y) + \lambda)}} = dt,$$

d'où la solution générale est sous forme

$$\pm \int \frac{dy}{\sqrt{2(\varphi(y) + \lambda)}} = t + \mu, \ \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 42

On considère l'équation $y'' = 2e^y$.

En multipliant par y' on a $y'y'' = 2y'e^y$, et donc en intégrant il vient $\frac{1}{2}(y')^2 = 2e^y + \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$y' = \pm\sqrt{4e^y + 2\lambda}, \ \text{ ou } \ \frac{dy}{\pm\sqrt{4e^y + 2\lambda}} = dt, \lambda \in \mathbb{R}.$$

En intégrant et après simplification on obtient

$$y(t) = 2\operatorname{Log}\left(\frac{\lambda}{\cos(\lambda t + \mu)}\right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \qquad ∎$$

3.2 Équations différentielles type-homogènes du second ordre

Ce sont les équations différentielles qui peuvent se mettre sous la forme

$$F\left(t, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}\right) = 0. \tag{3.1}$$

La résolution de ces équations se fait en effectuant un changement de fonction inconnue en posant $u(t) = \dfrac{y'(t)}{y(t)}$, et donc $\dfrac{y''}{y} = u' + u^2$. On est alors ramené à une équation différentielle du premier ordre $F(t, u, u' + u^2) = 0$.

Exemple 43

Soit l'équation $yy'' - (y')^2 + 6ty^2 = 0$.

On peut écrire cette équation sous la forme $\frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 + 6t = 0$ soit $F\left(t, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}\right) = 0$ avec $F(t, z, w) = w - z^2 + 6t$.

On effectue un changement de fonction inconnue en posant $u = \dfrac{y'}{y}$. D'où $\dfrac{y''}{y} = u' + u^2$ et donc l'équation $\frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 + 6t = 0$ devient $u' + 6t = 0$. D'où $u = -3t^2 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ et donc $\dfrac{y'}{y} = -3t^2 + \lambda$ qui est une équation différentielle du premier ordre ayant pour solution générale $y = \mu e^{-t^3 + \lambda t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ∎

3.3 Équations différentielles linéaires du second ordre

Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = c(t)\,. \tag{3.2}$$

Définition 24 (Solutions indépendantes)

Deux solutions y_1 et y_2 de l'équation (3.2) sont indépendantes sur un intervalle I s'il n'existe pas de réel k tel que pour tout $t \in I$: $y_2(t) = k y_1(t)$.

Remarque 25

Les fonctions y_1 et y_2 sont indépendantes cela signifie linéairement indépendantes au sens des espaces vectoriels.

Définition 26 (Wronskien)

Soient deux fonctions dérivables $t \mapsto y_1(t)$ et $t \mapsto y_2(t)$ sur un intervalle I.

Le *wronskien* de ces deux fonctions est défini à l'aide d'un déterminant

$$W(y_1(t), y_2(t)) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t) y_2'(t) - y_1'(t) y_2(t).$$

Les deux fonctions dérivables $t \mapsto y_1(t)$ et $t \mapsto y_2(t)$ sont linéairement indépendantes si et seulement si leur wronskien $W(y_1, y_2)$ n'est pas identiquement nul.

Exemple 44

Les fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto e^t$ sont indépendantes.

Les fonctions $f : t \mapsto 3e^{-t} \sin t$ et $g : t \mapsto 5e^{-t} \sin t$ ne le sont pas puisque $g = \frac{5}{3} f$. ∎

3.3.1 Équations linéaires homogènes du second ordre

Si $c(t) \equiv 0$ on dit que l'équation (3.2) est linéaire homogène ou sans second membre

$$y'' + a(t) y' + b(t) y = 0. \tag{3.3}$$

Cas où l'on connaît deux solutions particulières indépendantes :

Si y_1 et y_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation différentielle $y'' + a(t) y' + b(t) y = 0$, alors la solution générale de cette équation différentielle est $y = \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda$ et μ étant des constantes arbitraires.

Exemple 45

Pour l'équation différentielle homogène $t^2 y'' - 2y = 0$, en cherchant des solutions sous la forme $y(t) = t^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, on trouve que $y_1(t) = t^2$ et $y_2(t) = \frac{1}{t}$ sont des solutions particulières. D'après la propriété ci-dessus, on peut en déduire que la solution générale de l'équation différentielle est de la forme $y(t) = \lambda t^2 + \dfrac{\mu}{t}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ∎

Cas où l'on connaît une solution particulière :

Considérons l'équation différentielle homogène $y'' + a(t) y' + b(t) y = 0$ pour laquelle on connaît une solution particulière y_1.

La méthode pour trouver la solution générale consiste à effectuer un changement de fonction en posant $y(t) = y_1(t)\, v(t)$, où v étant la nouvelle fonction inconnue. Il vient

$$y_1'' v + 2y_1' v' + v'' y_1 + a(t)\left(y_1' v + y_1 v'\right) + b(t)\, y_1 v = 0.$$

Comme y_1 est solution de notre équation différentielle, alors on obtient

$$y_1 v'' + \left(2y_1' + a(t)\, y_1\right) v' = 0.$$

La fonction $w = v'$ est donc solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, qui se peut se réécrire

$$\frac{w'}{w} = \frac{v''}{v'} = -2\frac{y_1'(t)}{y_1(t)} - a(t).$$

La solution générale est donnée par $w(t) = \lambda\left(y_1(t)\right)^{-2} e^{-\int a(t)dt}, \lambda \in \mathbb{R}$.

D'où $v(t) = \displaystyle\int w(t)\, dt + \mu,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La solution générale de $y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = 0$ est donc

$$y(t) = y_1(t) \int w(t)\, dt + \mu y_1(t), \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 46

Considérons l'équation $(t+1)\, y'' - (2t-1)\, y' + (t-2)\, y = 0$.

On peut vérifier que $y_1(t) = e^t$ est une solution particulière.

Cherchons la solution générale sous la forme $y(t) = e^t v(t)$, alors

$$(t+1)\left(e^t v + 2e^t v' + v'' e^t\right) - (2t-1)\left(e^t v + e^t v'\right) + (t-2)\, e^t v = 0.$$

Apres simplification, on trouve $(t+1)\, v'' = -3v'$. En posant $w = v'$, on a $(t+1)\, w' = -3w$ équation différentielle du premier ordre ayant pour solution $w(t) = \frac{\lambda}{(t+1)^3}$. D'où

$$v(t) = \int w(t)\, dt + \mu = \frac{\lambda}{(t+1)^2} + \mu \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de notre équation différentielle est donc

$$y(t) = \left(\frac{\lambda}{(t+1)^2} + \mu\right) e^t, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \qquad \blacksquare$$

3.3.2 Équations linéaires non homogènes du second ordre

Si $c(t) \neq 0$ on dit que l'équation $y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = c(t)$ est linéaire non homogène ou avec second membre. L'équation $y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = 0$ est l'équation homogène associée.

Comme pour les équations différentielles linéaires du premier ordre, la solution générale de l'équation non homogène $y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = c(t)$ est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène.

Variations des constantes :

Supposons qu'on connaisse la solution générale $y = \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ de l'équation homogène $y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = 0$. On peut alors chercher la solution générale par la méthode de variation des constantes.

Le principe de cette méthode est de considérer λ et μ comme fonctions de la variable t. Cherchons la solutions sous la forme $y(t) = \lambda(t)\, y_1(t) + \mu(t)\, y_2(t)$. En reportant cette fonction dans l'équation non homogène, on a après simplification

$$2\lambda' y_1' + 2\mu' y_2' + \lambda'' y_1 + \mu'' y_2 + a(t)\,(\lambda' y_1 + \mu' y_2) = c(t).$$

En imposant la condition supplémentaire $\lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0$, on voit que $\lambda'' y_1 + \mu'' y_2 = -(\lambda' y_1' + \mu' y_2')$ et donc les dérivées λ' et μ' doivent vérifier le système

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0, \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = c(t). \end{cases}$$

En résolvant ce système on obtient

$$\lambda' = \frac{-c(t)\, y_2}{y_1 y_2' - y_1' y_2}, \quad \mu' = \frac{c(t)\, y_1}{y_1 y_2' - y_1' y_2}.$$

D'où la solution générale de l'équation non homogène $y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = c(t)$ est

$$y = y_1 \int \frac{-c(t)\, y_2}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dt + y_2 \int \frac{c(t)\, y_1}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dt + \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemple 47

Considérons l'équation $y'' - \frac{2}{t^2} y = te^t$. En cherchant des solutions pour l'équation homogène $y'' - \frac{2}{t^2} y == 0$ sous la forme $y(t) = t^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, on trouve que $y_1(t) = t^2$ et $y_2(t) = \frac{1}{t}$ sont deux solutions particulières indépendantes. D'où la solution générale de l'équation homogène est de la forme $y(t) = \lambda t^2 + \dfrac{\mu}{t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On va donc chercher la solution générale de l'équation non homogène sous la forme $y(t) = t^2 \lambda(t) + \dfrac{\mu(t)}{t}$. Les dérivées λ' et μ' doivent vérifier le système

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0, \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = c(t), \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} t^2 \lambda' + \dfrac{\mu'}{t} = 0, \\ 2t\lambda' - \dfrac{\mu'}{t^2} = te^t. \end{cases}$$

On en déduit que $\lambda' = \frac{1}{3} e^t, \mu' = \frac{-1}{3} t^3 e^t$ et donc

$$\lambda(t) = \frac{1}{3} e^t + \alpha, \quad \mu(t) = \frac{1}{3} e^t \left(-t^3 + 3t^2 - 6t + 6\right) + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

D'où la solution générale de l'équation non homogène est

$$y(t) = e^t \left(t - 2 + \frac{2}{t}\right) + \lambda t^2 + \frac{\mu}{t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \qquad \blacksquare$$

3.4 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants, est une équation du type

$$y'' + ay' + by = c\,(t)\,,$$

où les coefficients a et b sont des constantes réelles, $t \mapsto c(t)$ est une fonction donnée continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Comme dans le cas à coefficients non constants, on commence par résoudre l'équation homogène associée ou sans second membre

$$y'' + ay' + by = 0.$$

On cherche des solutions sous la forme $y = e^{rt}, r \in \mathbb{R}$. En substituant dans notre équation homogène, on obtient

$$\left(r^2 + ar + b\right) e^{rt} = 0.$$

Comme la fonction exponentielle n'est jamais nulle, pour avoir une solution il faut que

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Cette équation se nomme l'équation *caractéristique* (ou auxiliaire) associée à notre équation homogène. Les valeurs de r se trouvent aisément à l'aide de la formule quadratique

$$r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Trois cas peuvent alors se produire :

- Si $a^2 - 4b > 0$, on trouve deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, ce qui montre que les fonctions $y_1 = e^{r_1 t}$ et $y_2 = e^{r_2 t}$ sont deux solutions particulières indépendantes. La solution générale de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ sera alors

$$y_h = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $a^2 - 4b = 0$, on trouve une racine réelle double r_0. Dans ce cas, l'obtention d'une solution réelle r_0 montre que la fonction $y_1 = e^{r_0 t}$ est une solution particulière, d'autre part on peut montrer que $y_2 = te^{r_0 t}$ est aussi solution. On en déduit alors que la solution générale de l'équation homogène est de la forme

$$y_h = (\lambda t + \mu)\, e^{r_0 t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $a^2-4b<0$ on trouve deux racines complexes distinctes et conjuguées de forme générale $r_1=\alpha-i\beta$ et $r_2=\alpha+i\beta,\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Alors $y_1=e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ et $y_2=e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ sont deux solutions particulières indépendantes de l'équation homogène. D'où la solution homogène générale est

$$y_h=e^{\alpha t}\left(\lambda\cos(\beta t)+\mu\sin(\beta t)\right),\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R},$$

que l'on peut aussi mettre sous la forme

$$y_h=\lambda e^{\alpha t}\cos(\beta t+\mu)\quad \text{ou } y_h=\lambda e^{\alpha t}\sin(\beta t+\mu),\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Exemple 48

a) $y''+4y'+3y=0$.

L'équation caractéristique est $r^2+4r+3=0$, on a $r_1=-3, r_2=-1$. Alors la solution générale est $y=\lambda e^{-3t}+\mu e^{-t},\ \ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

b) $y''+4y'+9y=0$.

b) L'équation caractéristique est $r^2+4r+9=0$, on a $r_1=-2-i\sqrt{5}, r_2=-2+i\sqrt{5}$. Alors la solution générale est $y=e^{-2t}\left(\lambda\cos\left(\sqrt{5}t\right)+\mu\sin\left(\sqrt{5}t\right)\right),\ \ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

c) $y''+6y'+9y=0$.

c) L'équation caractéristique est $r^2+6r+9=0$, on a $r_1=-3$ une racine double. Alors la solution générale est $y=(\lambda t+\mu)e^{-3t},\ \ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$. ∎

Ensuite, il faut trouver une solution particulière y_p de l'équation avec le second membre

$$y''+ay'+by=c(t).$$

La solution générale sera $y=y_p+y_h$.

3.4.1 Recherche d'une solution particulière pour des seconds membres spécifiques

Dans la pratique, c'est la forme de la fonction $c(t)$ qui nous indiquera sous quelle forme chercher la solution particulière.

- Si $c(t)=p(t)$ est un polynôme de degré n :

Chercher une solution $q(t)$ qui soit un polynôme de degré n si $b\neq 0$, de degré $n+1$ si $b=0$ et $a\neq 0$, et de degré $n+2$ si $a=0$ et $b=0$.

Exemple 49

Cherchons une solution de l'équation $y'' - y' - 2y = 2t^2$.

L'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$ admet les racines -1 et 2. La solution générale de l'équation homogène associée est donc $y_h = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière sous forme d'un polynôme du second degré $y_p = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$.

On a $y_p' = 2\alpha t + \beta, y_p'' = 2\alpha$.

En remplaçant dans l'équation, on trouve : $-2\alpha t^2 - 2(\alpha + \beta)t + 2\alpha - \beta - 2\gamma = 2t^2$. D'où $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = -\frac{3}{2}$. Une solution particulière est donc $y_p = -t^2 + t - \frac{3}{2}$. D'où la solution générale est $y = -t^2 + t - \frac{3}{2} + \lambda e^{-t} + \mu e^{2t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ∎

- Si $c(t)$ est de la forme Ke^{rt}, avec $r^2 + ar + b \neq 0$:

  Chercher une solution de la forme αe^{rt}.

Exemple 50

Cherchons une solution de l'équation $y'' - y' - 2y = e^{3t}$.

La solution générale de l'équation homogène associée est $y_h = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme 3 n'est pas racine du polynôme caractéristique $r^2 - r - 2$, cherchons une solution particulière sous la forme $y_p = \alpha e^{3t}$. On a $y_p' = 3\alpha e^{3t}, y_p'' = 9\alpha e^{3t}$.

En remplaçant dans l'équation, on trouve $(9\alpha - 3\alpha - 2\alpha)e^{3t} = e^{3t}$, d'où $\alpha = \frac{1}{4}$. Une solution particulière est alors $y_p = \frac{1}{4}e^{3t}$. D'où la solution générale est $y = \frac{1}{4}e^{3t} + \lambda e^{-t} + \mu e^{2t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ∎

- Si $c(t)$ est de la forme Ke^{rt}, avec $r^2 + ar + b = 0$:

  Chercher une solution de la forme $\alpha t e^{rt}$ (ou $\alpha t^2 e^{rt}$ si r est racine double).

Exemple 51

Cherchons une solution de l'équation $y'' - y' - 2y = e^{2t}$.

La solution générale de l'équation homogène associée est $y_h = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme 2 est racine simple du polynôme caractéristique $r^2 - r - 2$, cherchons une solution particulière sous la forme $y_p = \alpha t e^{2t}$.

On a $y_p' = (2\alpha t + \alpha)e^{2t}, y_p'' = (4\alpha t + 4\alpha)e^{2t}$. En remplaçant dans l'équation, on trouve $\alpha = \frac{1}{3}$. D'où la solution générale est $y = \lambda e^{-t} + \left(\frac{1}{3}t + \mu\right)e^{2t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ∎

- Si $c(t)$ est de la forme $p(t)e^{rt}$, où p est un polynôme de degré n :

  Chercher une solution de la forme $q(t)e^{rt}$, où q est un polynôme de degré n si $r^2 + ar + b \neq 0$, et de degré $n + 1$ si $r^2 + ar + b = 0$ (ou même de degré $n + 2$ si r est racine double).

Exemple 52

Cherchons une solution de l'équation $y'' - y' - 2y = te^t$.

La solution générale de l'équation homogène associée est $y_h = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Comme 1 n'est pas racine du polynôme caractéristique $r^2 - r - 2$, cherchons une solution particulière sous la forme $y_p = (\alpha t + \beta) e^t$.

On a $y_p' = (\alpha t + \alpha + \beta) e^t, y_p'' = (\alpha t + 2\alpha + \beta) e^t$. En remplaçant dans l'équation, on trouve $\alpha = \frac{-1}{2}, \beta = \frac{-1}{4}$. D'où la solution générale est $y = \frac{-1}{4}(2t+1) e^t + \lambda e^{-t} + \mu e^{2t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ∎

- Si $c(t)$ est de la forme $d\cos(rt) + e\sin(rt)$:

  Chercher une solution de la forme $\alpha\cos(rt) + \beta\sin(rt)$ (ou $t(\alpha\cos(rt) + \beta\sin(rt))$ si $\cos(rt)$ est solution de l'équation homogène).

Exemple 53

Cherchons une solution de l'équation $y'' - y' - 2y = \sin(2t)$.

La solution générale de l'équation homogène associée est $y_h = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution sous la forme $y_p = \alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t)$.

On a $y_p' = -2\alpha\sin(2t) + 2\beta\cos(2t), y_p'' = -4\alpha\cos(2t) - 4\beta\sin(2t)$.

En remplaçant dans l'équation, on trouve $-2(3\alpha + \beta)\cos(2t) + (2\alpha - 6\beta)\sin(2t) = \sin(2t)$, donc $3\alpha + \beta = 0$ et $2\alpha - 6\beta = 1$, d'où $\alpha = \frac{1}{20}, \beta = \frac{-3}{20}$.

Alors la solution générale est $y = \frac{1}{20}\cos(2t) - \frac{3}{20}\sin(2t) + \lambda e^{-t} + \mu e^{2t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ∎

- Si $c(t)$ est la somme de plusieurs fonctions $c_1(t), \cdots, c_k(t)$ qui sont chacune d'un des types ci-dessus :

  Chercher pour i de 1 à k une solution particulière $s_i(t)$ de chacune des équations

  $$y'' + ay' + by = c_i(t).$$

  La fonction $s_1(t) + \cdots + s_k(t)$ sera solution particulière de $y'' + ay' + by = c(t)$.

Exemple 54

Cherchons une solution de l'équation $y'' - y' - 2y = 2t^2 + e^{2t}$.

Une solution particulière de $y'' - y' - 2y = 2t^2$ est $y_{p_1} = -t^2 + t - \frac{3}{2}$.

Une solution particulière de $y'' - y' - 2y = e^{2t}$ est $y_{p_2} = \frac{1}{3}te^{2t}$.

Donc $y_p = -t^2 + t - \frac{3}{2} + \frac{1}{3}te^{2t}$ est solution particulière de $y'' - y' - 2y = 2t^2 + e^{2t}$. ∎

Résumons les cas ci-dessus dans le tableau suivant.

Second membre $c(t)$	Solution particulière $y_p(t)$
$c(t) = p(t)$ est un polynôme de degré n	$y_p(t)$ polynôme de degré n si $b \neq 0$ de degré $n+1$ si $b = 0$ et $a \neq 0$ de degré $n+2$ si $a = b = 0$
$c(t) = Ke^{rt}$, avec $r^2 + ar + b \neq 0$	$y_p(t) = \alpha e^{rt}$
$c(t) = Ke^{rt}$, avec $r^2 + ar + b = 0$	$y_p(t) = \alpha t e^{rt}$ si r racine simple. $y_p(t) = \alpha t^2 e^{rt}$ si r racine double.
$c(t) = p(t)\, e^{rt}, r^2 + ar + b \neq 0, \deg p = n$	$y_p(t) = q(t)\, e^{rt}$, q polynôme de degré n
$c(t) = p(t)\, e^{rt}, r^2 + ar + b = 0, \deg p = n$	$y_p(t) = q(t)\, e^{rt}$, q polynôme de degré $n+1$
$c(t) = p(t)\, e^{rt}, r = \frac{-a}{2}, \deg p = n$	$y_p(t) = q(t)\, e^{rt}$, q polynôme de degré $n+2$
$c(t) = d\cos(rt) + e\sin(rt)$	$y_p(t) = \alpha\cos(rt) + \beta\sin(rt)$

3.4.2 Solution particulière par la méthode de variation des constantes

Comme nous l'avons vu dans le cas général des équations linéaires du second ordre, une solution particulière de l'équation $y'' + ay' + by = c(t)$ peut être obtenue par la méthode de variation des constantes (voir page 44).

$$y = y_1 \int \frac{-c(t)\, y_2}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dt + y_2 \int \frac{c(t)\, y_1}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dt + \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

où y_1 et y_2 sont 2 solutions particulières indépendantes de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$. Si r_1 et r_2 sont deux racines distinctes du polynôme caractéristique $r^2 + ar + b$, alors $y_1 = e^{r_1 t}$, $y_2 = e^{r_2 t}$. Dans ce cas, par intégration par parties, on peut écrire la solution générale de l'équation avec second membre en une seule formule

$$y = e^{r_1 t} \int \left(e^{(r_2 - r_1)t} \left(\int e^{-r_2 t} c(t)\, dt \right) \right) dt.$$

Exemple 55

Cherchons une solution de l'équation $y'' - y' - 2y = e^{-t}$.

L'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$ admet les racines $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$. La solution générale est donc

$$\begin{aligned} y &= e^{-t} \int \left(e^{3t} \left(\int e^{-2t} e^{-t} dt \right) \right) dt = e^{-t} \int \left(e^{3t} \left(-\tfrac{1}{3} e^{-3t} + \lambda \right) \right) dt \\ &= e^{-t} \left(\tfrac{1}{3} \lambda e^{3t} - \tfrac{1}{3} t + \mu \right) = \tfrac{1}{3} \lambda e^{2t} + \left(\mu - \tfrac{1}{3} t \right) e^{-t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

∎

3.5 Équations linéaires homogènes à coefficients analytiques

Soit donnée une équation différentielle du second ordre homogène

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0. \tag{3.4}$$

Supposons que les coefficients $a(t)$ et $b(t)$ puissent être représentés sous forme de séries suivant les puissances entières positives de t, c'est-à-dire $a(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ et $b(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k t^k$. Cherchons la solution de (3.4) sous la forme d'une série entière $y(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$.

En introduisant cette expression de y et de ses dérivées dans (3.4), on obtient

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\,c_k t^{k-2} + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k c_k t^{k-1}\right) + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k\right) = 0. \tag{3.5}$$

En multipliant les séries entières, en groupant les termes semblables et en annulant les coefficients de toutes les puissances de t au premier membre de (3.5), on obtient une série d'équations

$$\begin{aligned}
t^0 &: \quad 2\cdot 1 c_2 + a_0 c_1 + b_0 c_0 = 0,\\
t^1 &: \quad 3\cdot 2 c_3 + 2a_0 c_2 + a_1 c_1 + b_0 c_1 + b_1 c_0 = 0,\\
t^2 &: \quad 4\cdot 3 c_4 + 3a_0 c_3 + 2a_1 c_2 + a_2 c_1 + b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 = 0,\\
. &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Chacune des équations suivantes (3.6) comporte un coefficient de plus que l'équation précédente. Les coefficients c_0 et c_1 restent arbitraires et jouent le rôle de constantes d'intégration. La première des équation (3.6) donne c_2, la deuxième c_3, la troisième c_4 et ainsi de suite. En pratique il est commode de procéder comme suit : d'après le schéma décrit plus haut on cherche deux solutions $y_1(t)$ et $y_2(t)$, en choisissant pour y_1, $c_0 = 1$ et $c_1 = 0$ et pour y_2, $c_0 = 0$ et $c_1 = 1$. Toute solution de (3.4) sera une combinaison linéaire de $y_1(t)$ et $y_2(t)$.

On peut énoncer le théorème suivant.

Théorème 27

Si les séries $a(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ et $b(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k t^k$ convergent pour $|x| < R$, alors la série $y(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ construite par le procédé indiqué plus haut sera aussi convergente pour $|x| < R$ et constituera une solution de (3.4).

En particulier si $a(t)$ et $b(t)$ sont des polynômes en t, la série $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ sera convergente pour toute valeur de t.

Exemple 56

Trouver la solution de l'équation

$$y'' - ty' - 2y = 0 \tag{3.7}$$

sous forme d'une série entière.

Cherchons $y_1(t)$ sous forme de la série $y_1(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$, alors

$$y_1'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k t^{k-1}, y_1''(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k t^{k-2}.$$

En introduisant $y_1(t), y_1'(t)$ et $y_1''(t)$ dans (3.7), on obtient

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k t^{k-2} - t\sum_{k=1}^{+\infty} k c_k t^{k-1} - 2\sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k = 0. \tag{3.8}$$

En groupant dans (3.8) les termes semblables et en annulant les coefficients de toutes les puissances de t, on obtient des relations permettant de déterminer $c_0, c_1, \cdots$.

Posons $y_1(0) = 1$ et $y_1'(0) = 0$. Alors on trouve $c_0 = 1, c_1 = 0$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
t^0 &: \ 2c_2 - 2c_0 = 0, \text{ d'où } c_2 = c_0 = 1, \\
t^1 &: \ 6c_3 - c_1 - 2c_1 = 0, \text{ d'où } c_3 = \tfrac{1}{2}c_1 = 0, \\
t^2 &: \ 12c_4 - 2c_2 - 2c_2 = 0, \text{ d'où } c_4 = \tfrac{1}{3}c_2 = \tfrac{1}{3}, \\
t^3 &: \ 20c_5 - 3c_3 - 2c_3 = 0, \text{ d'où } c_5 = \tfrac{1}{4}c_3 = 0, \\
. \quad & \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots .
\end{aligned}$$

Par conséquent $y_1(t) = 1 + t^2 + \frac{1}{3}t^4 + \cdots$. De façon analogue, en prenant $y_2(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k t^k$ et les conditions initiales $y_2(0) = 0$ et $y_2'(0) = 1$, on obtient $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$.

En portant $y_2(t)$ dans (3.7), on trouve

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\alpha_k t^{k-2} - \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)\alpha_k t^k = 0.$$

Par un changement d'indice dans la première somme on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)\Big((k+1)\alpha_{k+2} - \alpha_k\Big) t^k = 0.$$

Alors $\alpha_{k+2} = \frac{1}{k+1}\alpha_k, k = 2, 3, \cdots$. On en déduit que $\alpha_{2k} = 0$ et $\alpha_{2k+1} = \frac{1}{k!2^k}$, et donc

$$y_2(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!2^k} t^{2k+1} = t\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k = te^{\frac{t^2}{2}}.$$

La solution générale de l'équation (3.7) sera sous la forme $y(t) = \lambda y_1(y) + \mu y_2(t), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ∎

3.5.1 Coefficients analytiques, points réguliers

Définition 28 (Points régulier et singulier)

On dit qu'un point t_0 est un point régulier ou ordinaire de l'équation différentielle

$$y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = 0, \tag{3.9}$$

si les coefficients $a(t)$ et $b(t)$ sont analytiques en ce point ; dans le cas contraire, le point t_0 s'appelle point singulier de l'équation différentielle (3.9).

Dans les exemples suivants, $t_0 = 0$.

L'équation différentielle d'Airy

C'est l'équation $y'' - ty = 0$.
La relation de récurrence pour les coefficients de la solution $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ est

$$(k+2)(k+1)\, c_{k+2} = c_{k-1} \text{ pour } k \geq 1,\ c_2 = 0.$$

D'où $c_{3k} = \dfrac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (3k-1)(3k)}$, $c_{3k+1} = \dfrac{c_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (3k)(3k+1)}$, $c_{3k+2} = 0$, et donc

$$y(t) = c_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{3k} t^{3k}\right) + c_1 \left(t + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{3k+1} t^{3k+1}\right).$$

L'équation différentielle d'Hermite

C'est l'équation $y'' - 2ty' + ay = 0, a \in \mathbb{R}$.
La relation de récurrence pour les coefficients de la solution $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ est

$$(k+2)(k+1)\, c_{k+2} = -(a-2k)\, c_k \text{ pour } k \geq 0.$$

D'où

$$c_{2k} = \tfrac{(-1)^k}{(2k)!} a(a-4)(a-8)\cdots(a-4(k-1))\, c_0,$$

$$c_{2k+1} = \tfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} (a-2)(a-6)\cdots(a-2-4(k-1))\, c_1,$$

et

$$y(t) = c_0 y_0(t) + c_1 y_1(t) \text{ où } y_0(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k} t^{2k} \text{ et } y_1(t) = t + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k+1} t^{2k+1}.$$

Lorsque $a = 2n$ est un entier pair, $c_{n+2} = 0$ et la solution paire $y_0(t)$ est un polynôme si n est pair, la solution impaire $y_1(t)$ est un polynôme si n est impair. Le n-ième polynôme d'Hermite est normalisé par la condition que le coefficient de t^n vaut 2^n. Son expression est

$$H_n(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n! 2^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!} t^{n-2k}.$$

L'équation différentielle de Tchebychev

C'est l'équation $(1-t^2)\,y'' - ty' + a^2 y = 0, a \in \mathbb{R}$.
La relation de récurrence pour les coefficients de la solution $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ est

$$(k+2)(k+1)\,c_{k+2} = -\left(a^2 - k^2\right) c_k \text{ pour } k \geq 0.$$

D'où

$$c_{2k} = \tfrac{(-1)^k}{(2k)!} a^2 (a^2-4)(a^2-16)\cdots\left(a^2-(2k-2)^2\right) c_0,$$

$$c_{2k+1} = \tfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} (a^2-1)(a^2-9)\cdots\left(a^2-(2k-1)^2\right) c_1,$$

et

$$y(t) = c_0 y_0(t) + c_1 y_1(t) \text{ où } y_0(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k} t^{2k} \text{ et } y_1(t) = t + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k+1} t^{2k+1}.$$

Lorsque $a = n$ est un entier, $c_{n+2} = 0$ et la solution paire $y_0(t)$ est un polynôme si n est pair, la solution impaire $y_1(t)$ est un polynôme si n est impair. Le n-ième polynôme de Tchebychev est normalisé par la condition que le coefficient de t^n vaut 2^{n-1}. Son expression est

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} \binom{j}{k} t^{n-2k} \text{ avec } \binom{j}{k} = \frac{j!}{k!\,(j-k)!}.$$

Le polynôme de Tchebychev possède la propriété remarquable de pouvoir s'écrire sous la forme $T_n(t) = \cos(n \operatorname{Arcsin} t)$. En effet, posant $t = \cos\theta$, l'équation $(1-t^2)\dfrac{d^2y}{dt^2} - t\dfrac{dy}{dt} + n^2 y = 0$ devient $\dfrac{d^2y}{d\theta^2} + n^2 y = 0$ et $y = \cos(n\theta)$ est la solution qui coïncide avec $T_n(\cos\theta)$.

L'équation différentielle de Legendre

C'est l'équation $(1-t^2)\,y'' - 2ty' + a(a+1)\,y = 0, a \in \mathbb{R}$.
La relation de récurrence pour les coefficients de la solution $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ est

$$(k+2)(k+1)\,c_{k+2} = -\left(a(a+1) - k(k+1)\right) c_k \text{ pour } k \geq 0.$$

D'où

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a\,(a-2)\cdots(a-2k+2)\,(a+1)\,(a+3)\cdots(a+2k-1)\,c_0,$$
$$c_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,(a-1)\,(a-3)\cdots(a-2k+1)\,(a+2)\,(a+4)\cdots(a+2k)\,c_1,$$

et

$$y(t) = c_0 y_0(t) + c_1 y_1(t) \text{ où } y_0(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k} t^{2k} \text{ et } y_1(t) = t + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k+1} t^{2k+1}.$$

Lorsque $a = n$ est un entier, $c_{n+2} = 0$ et la solution paire $y_0(t)$ est un polynôme si n est pair, la solution impaire $y_1(t)$ est un polynôme si n est impair. Le n-ième polynôme de Legendre $P_n(t)$ est normalisé par la condition que $P_n(1) = 1$. Son expression est

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} t^{n-2k}.$$

3.5.2 Coefficients analytiques, points singuliers

Nous supposons que t_0 est un point singulier régulier de l'équation différentielle

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0,$$

c'est-à-dire que les limites $\lim_{t\to t_0} (t-t_0)\,a(t)$ et $\lim_{t\to t_0} (t-t_0)^2\,b(t)$ existent. Pour simplifier, prenons $t_0 = 0$. On peut alors réécrire l'équation précédente sous la forme

$$t^2 y'' + t p(t)\,y' + q(t)\,y = 0, \tag{3.10}$$

où $p(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k$ et $q(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k t^k$ sont analytiques dans $|t| < \rho$.
Pour résoudre cette équation, on cherche, suivant Frobenius, une solution de la forme

$$y(t) = t^r \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k,\ c_0 \neq 0. \tag{3.11}$$

Pour déterminer l'exposant r et les coefficients c_k il faut introduire la série (3.11) dans l'équation (3.10), simplifier par t^r et annuler les coefficients de toutes les puissances de t. Dans ce cas, le nombre r se détermine à partir de l'équation dite déterminante

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0. \tag{3.12}$$

Soient r_1 et r_2 les racines de l'équation déterminante (3.12). Trois cas différents peuvent se présenter.

1. Si $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$, alors on peut construire deux solutions de la forme (3.11)

$$y_1(t) = t^{r_1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{1,k} t^k,\ c_{1,0} \neq 0, \qquad y_2(t) = t^{r_2} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2,k} t^k,\ c_{2,0} \neq 0.$$

2. Si $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$, alors $y_1(t) = t^{r_1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{1,k} t^k,\ c_{1,0} \neq 0$ et y_2 est une deuxième solution linéairement indépendante analytique dans $0 < t < \rho$:

$$y_2(t) = a y_1(t) \operatorname{Log} t + t^{r_2} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2,k} t^k,$$

avec a une constante dépendante de r_2.

3. Si $r_1 = r_2$, alors y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes analytiques dans $0 < t < \rho$:

$$y_1(t) = t^{r_1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{1,k} t^k,\ y_2(t) = y_1(t) \operatorname{Log} t + t^{r_2} \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2,k} t^k.$$

Exemple 57

Résoudre l'équation

$$2t^2 y'' + t(3 - 2t) y' - (t + 1) y = 0. \tag{3.13}$$

Écrivons (3.13) sous la forme

$$y'' + \frac{3 - 2t}{2t} y' - \frac{t + 1}{2t^2} y = 0.$$

Cherchons la solution y sous la forme $y(t) = t^r \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k,\ c_0 \neq 0$. Pour déterminer r écrivons l'équation déterminante $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$, où $p_0 = \lim_{t \to 0} \frac{3-2t}{2} = \frac{3}{2}$ et $q_0 = \lim_{t \to 0} \left(-\frac{t+1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $r(r-1) + \frac{3}{2} r - \frac{1}{2} = 0$, ou $r^2 + \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} = 0$, d'où $r_1 = \frac{1}{2}$ et $r_2 = -1$.
En vertu de la règle énoncée plus haut, prenons

$$y_1(t) = \sqrt{t} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k, (t > 0), \qquad y_2(t) = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k.$$

Pour trouver les a_k il faut introduire y_1 et ses dérivées y_1' et y_1'' dans (3.13)

$$y_1(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{k+\frac{1}{2}},\ y_1'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(k + \tfrac{1}{2}\right) a_k t^{k-\frac{1}{2}},\ y_1''(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(k^2 - \tfrac{1}{4}\right) a_k t^{k-\frac{3}{2}}.$$

L'introduction de y_1, y_1' et y_1'' dans (3.13) donne

$$2t^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(k^2 - \tfrac{1}{4}\right) a_k t^{k-\frac{3}{2}} + t(3 - 2t) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(k + \tfrac{1}{2}\right) a_k t^{k-\frac{1}{2}} - (t + 1) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{k+\frac{1}{2}} = 0.$$

Après les transformations, on obtient

$$\sqrt{t}\sum_{k=0}^{+\infty} k\left(2k+3\right)a_k t^k - \sqrt{t}\sum_{k=0}^{+\infty} 2\left(k+1\right)a_k t^{k+1} = 0.$$

La relation de récurrence pour les coefficients de la solution y_1 est donc

$$k\left(2k+3\right)a_k = 2ka_{k-1} \text{ pour } k \geq 1.$$

En prenant $a_0 = 1$, il vient $a_k = \frac{2^k}{5\cdot 7\cdot 9\cdot\cdots\cdot(2k+3)},\ k \geq 1$, et donc

$$y_1\left(t\right) = \sqrt{t}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{5\cdot 7\cdot 9\cdot\cdots\cdot(2k+3)}t^k, \left(t > 0\right).$$

D'une manière analogue, en prenant $b_0 = 1$, on obtient $b_k = \frac{1}{k!}$, si bien que $y_2\left(t\right) = \frac{1}{t}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}t^k$ ou $y_2\left(t\right) = \frac{e^t}{t}$. La solution générale de l'équation (3.13) est

$$y\left(t\right) = \lambda y_1\left(t\right) + \mu y_2\left(t\right) = \lambda\sqrt{t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{5\cdot 7\cdot 9\cdot\cdots\cdot(2k+3)}t^k + \mu\frac{e^t}{t},\quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}. \qquad \blacksquare$$

L'équation différentielle d'Euler

C'est l'équation $t^2y'' + tp_0y' + q_0y = 0,\ p_0, q_0 \in \mathbb{R}$.

On cherche des solutions particulières sous la forme $y = t^r$. On a

$$y' = rt^{r-1} \text{ et } y'' = r\left(r-1\right)t^{r-2},$$

en reportant, on obtient l'équation $r\left(r-1\right) + p_0r + q_0 = 0$ du second degré en r.

Si cette équation a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, $r_1 \neq r_2$ alors $y_1 = t^{r_1}$ et $y_2 = t^{r_2}$ sont deux solutions particulières indépendantes donc $y = \lambda t^{r_1} + \mu t^{r_2},\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$.

Sinon on utilise la méthode plus générale : on effectue un changement de variable en posant $t = e^s$, on note $y\left(t\right) = y\left(e^s\right) = z\left(s\right)$ et on exprime $\dfrac{dy}{dt}$ et $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ en fonction de $\dfrac{dz}{ds}$ et $\dfrac{d^2z}{ds^2}$.

On a

$$\frac{dy\left(t\right)}{dt} = \frac{dy\left(e^s\right)}{dt} = \frac{dy\left(e^s\right)}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{dz\left(s\right)}{ds}\cdot\frac{1}{t} \quad \text{donc } t\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{ds},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz\left(s\right)}{ds}\cdot\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\right) \quad \text{donc } t^2\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}.$$

On obtient alors l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$\frac{d^2z}{ds^2} + \left(p_0 - 1\right)\frac{dz}{ds} + q_0z = 0.$$

On aura alors suivant la nature des racines du polynôme caractéristique $r^2 + \left(p_0 - 1\right)r + q_0$:

- $y = \lambda t^{r_1} + \mu t^{r_2}$ dans le cas de deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, $r_1 \neq r_2$.
- $y = t^a \left(\lambda \cos\left(b \operatorname{Log} t\right) + \mu \sin\left(b \operatorname{Log} t\right)\right)$ dans le cas de deux racines complexes conjuguées $a \pm ib = \frac{1-p_0}{2} \pm i\frac{\sqrt{4q_0-(1-p_0)^2}}{2}$.
- $y = \left(\lambda + \mu \operatorname{Log} t\right) t^{r_0}$ dans le cas d'une racine réelle double $r_0 = \frac{1-p_0}{2}$.

Exemple 58

a) $t^2y'' - ty' - 3y = 0$.

On cherche des solutions particulières sous la forme $y = t^r$, on obtient une équation du second degré $r\left(r-1\right) - r - 3 = 0$ soit $r^2 - 2r - 3 = 0$, on trouve $r_1 = 3$ et $r_2 = -1$. Alors la solution générale est $y = \lambda t^3 + \dfrac{\mu}{t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

b) $t^2y'' + 3ty' + y = 0$.

On cherche des solutions particulières sous la forme $y = t^r$, on obtient une équation du second degré $r\left(r-1\right) + 3r + 1 = 0$ soit $\left(r+1\right)^2 = 0$, on trouve $r = -1$ comme racine double. On utilise alors la méthode plus générale : on pose $t = e^s$ et on note $y\left(t\right) = y\left(e^s\right) = z\left(s\right)$. Alors $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dz}{ds} \cdot \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{t}\dfrac{dz}{ds}$ car $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{t}$ et $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{d^2z}{ds^2} - \dfrac{dz}{ds}\right)$. L'équation $t^2y'' + 3ty' + y = 0$ se transforme alors en $\dfrac{d^2z}{ds^2} + 2\dfrac{dz}{ds} + z = 0$. On résout l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$: on trouve $r = -1$ comme racine double donc $z\left(s\right) = e^{-s}\left(\lambda + \mu s\right)$. Alors la solution générale est $y = \dfrac{1}{t}\left(\lambda + \mu \operatorname{Log} t\right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ∎

L'équation différentielle de Laguerre

C'est l'équation $ty'' + \left(1-t\right)y' + ay = 0, \ a \in \mathbb{R}$.

On a ici $p\left(t\right) = 1-t$ et $q\left(t\right) = at$ et $t = 0$ est un point singulier régulier. L'équation déterminante est $r\left(r-1\right) + p_0 r + q_0 = 0$, où $p_0 = p\left(0\right) = 1$ et $q_0 = q\left(0\right) = 0$, c'est-à-dire $r\left(r-1\right) + r = 0$, ou $r^2 = 0$, d'où $r_1 = r_2 = 0$.

La relation de récurrence pour les coefficients c_k de la solution $y_1\left(t\right) = t^{r_1}\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k t^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ est

$$k^2 c_k = -\left(a+1-k\right)c_{k-1} \text{ pour } k \geq 1.$$

En prenant $c_0 = 1$, il vient $c_k = \left(-1\right)^k \frac{a(a-1)\cdots(a-(k-1))}{1^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot k^2}, \ k \geq 1$, et donc

$$y_1\left(t\right) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-1\right)^k \frac{a\left(a-1\right)\cdots\left(a-\left(k-1\right)\right)}{\left(k!\right)^2} t^k,$$

et

$$y_2\left(t\right) = y_1\left(t\right)\operatorname{Log} t + t^{r_2}\sum_{k=1}^{+\infty} b_k t^k = y_1\left(t\right)\operatorname{Log} t + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k t^k.$$

Lorsque $a = n$ est un entier, y_1 est un polynôme. Le n-ième polynôme de Laguerre $L_n(t)$ est normalisé par $L_n(0) = 1$. Son expression est

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{t^k}{k!}, \text{ où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

L'équation différentielle hypergéométrique

C'est l'équation $t(1-t)y'' + (\gamma - (1+\alpha+\beta)t)y' - \alpha\beta y = 0,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
Ici $p(t) = \frac{\gamma-(1+\alpha+\beta)t}{1-t}$ et $q(t) = \frac{-\alpha\beta t}{1-t}$ et $t = 0$ est un point singulier régulier. On a $p_0 = p(0) = \gamma$ et $q_0 = q(0) = 0$, donc l'équation déterminante en $t = 0$ est $r(r-1) + \gamma r = 0$, d'où $r_1 = 0$ et $r_2 = 1 - \gamma$. Le point $t = 1$ est aussi un point singulier régulier.
On considère le point $t = 0$ en supposant que $1 - \gamma \notin \mathbb{N}^*$. Sur l'intervalle $]0, 1[$, on aura une solution $y_1(t) = t^{r_1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ avec la récurrence $(k+1)(k+\gamma)c_{k+1} = (k+\alpha)(k+\beta)c_k$ pour $k \geq 0$, ce qui conduit, en prenant $c_0 = 1$, à

$$y_1(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{(k!)^2} t^k.$$

On aura une seconde solution linéairement indépendante $y_2(t) = t^{1-\gamma}\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k t^k\right)$ avec cette fois la récurrence

$$(k+1)(k+1+1-\gamma)c_{k+1} = (k+1-\gamma+\alpha)(k+1-\gamma+\beta)c_k \text{ pour } k \geq 0.$$

D'où

$$y_2(t) = t^{1-\gamma}\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\alpha+1-\gamma)\cdots(\alpha+k-\gamma)(\beta+1-\gamma)\cdots(\beta+k-\gamma)}{(k!)(2-\gamma)\cdots(k+1-\gamma)} t^k\right).$$

Quant au point $t = 1$, le changement de variables $s = 1 - t, z(s) = y(1-t)$ on ramène l'étude à celle de l'équation

$$s(1-s)z'' + (1+\alpha+\beta-\gamma-(1+\alpha+\beta)s)z' - \alpha\beta z = 0$$

au point $s = 0$.
La fonction hypergéométrique est

$${}_pF_q(a_1, a_2, \cdots, a_p, b_1, b_2, \cdots, b_q)(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k (b_2)_k \cdots (b_p)_k k!} t^k,$$

où $(c)_k = c(c+1)(c+2)\cdots(c+k-1),\ k \geq 1$.

L'équation différentielle de Bessel

C'est l'équation $t^2y'' + ty' + (t^2 - \alpha^2)\, y = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}_+$.

Ici $p(t) = 1$ et $q(t) = t^2 - \alpha^2$ et $t = 0$ est un point singulier régulier. On a $p_0 = p(0) = 1$ et $q_0 = q(0) = -\alpha^2$, donc l'équation déterminante en $t = 0$ est $r(r-1) + r - \alpha^2 = 0$, d'où $r_1 = -\alpha$ et $r_2 = \alpha$.

Cherchons une première solution particulière y_1 sous la forme $y_1(t) = t^\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k,\ c_0 \neq 0$.

Introduisons y_1, y_1' et y_1'' dans l'équation différentielle de Bessel, il vient

$$t^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (k+\alpha)(k+\alpha-1)\, c_k t^{k+\alpha-2} + t \sum_{k=0}^{+\infty} (k+\alpha)\, c_k t^{k+\alpha-1} + \left(t^2 - \alpha^2\right) \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^{k+\alpha} = 0,$$

ou encore, après des transformations simples et la simplification par t^α,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left((k+\alpha)^2 - \alpha^2\right) c_k t^k + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^{k+2} = 0.$$

Ce qui donne la récurrence $\left((k+\alpha)^2 - \alpha^2\right) c_k = -c_{k-2}$ pour $k \geq 2$, ce qui conduit à

$$c_{2k+1} = 0,\ k \geq 0,\ \text{et } c_{2k} = (-1)^k \frac{c_0}{2^{2k}(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)\, k!},\ k \geq 1.$$

Pour simplifier les calculs ultérieures, prenons $c_0 = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}$, où Γ est la fonction gamma d'Euler, qui est déterminée pour toutes les valeurs positives (ainsi que pour toutes les valeurs complexes à partie réelle positive) par la relation

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\nu-1} dx.$$

La fonction gamma possède les propriétés importantes suivantes :

1) $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$,

2) $\Gamma(k) = k!,\quad k \in \mathbb{N}^*$,

3) $\Gamma(\nu+k+1) = (\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)\,\Gamma(\nu+1),\quad k \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant les propriétés de la fonction gamma, écrivons le coefficient c_{2k} sous la forme

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\alpha}(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)\,\Gamma(\alpha+1)\,k!} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\alpha}\Gamma(\alpha+k+1)\,k!}.$$

Maintenant, la première solution particulière de l'équation de Bessel, que nous désignerons par J_α prend la forme

$$y_1(t) = J_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\alpha}. \tag{3.14}$$

Cette fonction s'appelle fonction de Bessel de première espèce d'ordre α.

Une deuxième solution particulière y_2 de l'équation de Bessel sera cherchée sous la forme $y_2(t) = t^{-\alpha}\sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$, $c_0 \neq 0$. Il est clair que cette solution peut être obtenue à partir de (3.14) en remplaçant α par $-\alpha$

$$y_2(t) = J_{-\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1-\alpha)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-\alpha}.$$

Cette fonction s'appelle fonction de Bessel de première espèce d'ordre $-\alpha$.

Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, les solutions J_α et $J_{-\alpha}$ sont linéairement indépendantes, donc la solution générale de l'équation de Bessel peut être représentée sous la forme

$$y(t) = \lambda J_\alpha(t) + \mu J_{-\alpha}(t), \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, J_α et $J_{-\alpha}$ sont linéairement dépendantes puisque $J_n(t) = (-1)^n J_{-n}(t)$. Ainsi, pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, au lieu de $J_{-\alpha}$ il faut chercher une autre solution qui soit linéairement indépendante de J_α. À cet effet, introduisons une nouvelle fonction

$$Y_\alpha(t) = \frac{J_\alpha(t)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(t)}{\sin(\alpha\pi)}, \tag{3.15}$$

en considérant d'abord que $\alpha \notin \mathbb{N}$.

Il est évident que la fonction Y_α ainsi définie est solution de l'équation de Bessel, parce qu'elle représente une combinaison linéaire de solutions particulières J_α et $J_{-\alpha}$.

En passant dans (3.15) à la limite lorsque α tend vers un entier, on obtient un solution particulière Y_α linéairement indépendante de J_α.

La fonction Y_α introduite ci-dessus s'appelle fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre α.

La solution générale de l'équation de Bessel si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ peut être représentée sous la forme

$$y(t) = \lambda J_\alpha(t) + \mu Y_\alpha(t), \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3.6 Exercices

Exercice 3.1

(Équations différentielles incomplètes) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' + y' = t + 2$, **b)** $ty'' = y' + t^2$, **c)** $y^2y'' + y' = 0$, **d)** $yy'' = y' + (y')^2$, **e)** $y'' = e^{2y}$.

Exercice 3.2

(Équation type-homogène) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $tyy'' - t\left(y'\right)^2 - yy' = 3t^2y^2$, **b)** $2yy'' - 3\left(y'\right)^2 = 4ty^2$, **c)** $yy'' - \left(y'\right)^2 + yy' + ty^2 = 0$.

Exercice 3.3

Montrer que l'équation différentielle :

$$\left(1 - t^2\right) y'' - 2ty' + 2y = 0$$

possède pour solution particulière un polynôme.

En déduire les solutions de cette équation différentielle.

Exercice 3.4

Déterminer une solution particulière de chacune des équations différentielles suivantes :

a) $y'' - 5y' + 6y = 2e^{4t}$, **b)** $y'' - y' + y = 5$, **c)** $y'' + 2y' + 5y = \cos t$,

d) $y'' + y' - 2y = t + \cos t$, **e)** $y'' - 3y' + 2y = e^t \sin(3t)$, **f)** $y'' + 3y' + 2y = \left(t^2 + 1\right) e^{-t}$.

En déduire les solutions de ces équations différentielles.

Exercice 3.5

Résoudre en utilisant la méthode de variation des constantes les équations différentielles suivantes :

$$\textbf{a)}\ \ y'' + y = \frac{1}{\cos t}, \qquad \textbf{b)}\ y'' - y = \frac{1}{\left(1 + e^{-t}\right)^2}.$$

Exercice 3.6

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$, **b)** $t^2y'' + 4ty' + 2y = 2t \operatorname{Log} t$, **c)** $t^2y'' + ty' + y = 6 - \operatorname{Log} t$.

Exercice 3.7

En posant $s = \operatorname{Arctg} t$, résoudre l'équation différentielle $\left(t^2 + 1\right)^2 y'' + 2t\left(t^2 + 1\right) y' + \alpha y = 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.8

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' + yy' = 0$, **b)** $\left(y + 3\left(y'\right)^2\right) y'' - 2\left(y'\right)^2 = 0$, **c)** $y^2 + 2\left(y'\right)^2 - yy'' = 0$,

d) $y'' + y' - 2y = 4t$, **e)** $y'' - 2y' - 3y = e^{-t}\left(8t + 6\right)$, **f)** $y'' + y' - 6y = \operatorname{th} t$,

g) $y'' - 2y' + 5y = \dfrac{e^t}{\cos t}$, **h)** $\left(t^2 - t\right) y'' + \left(2 - t\right) y' - 3y = t^2$, **i)** $y'' - 2y' + 2y = e^t \operatorname{tg} t$,

j) $2t^2 y'' + ty' - y = 0$, **k)** $y'' + 4y' + \alpha y = e^{-2t}, \alpha \in \mathbb{R}$, **l)** $t^2 y'' + ty' + y = \operatorname{Log}\left(xe\right)$,

m) $y'' + 2ty' = -t$, **n)** $y'' = y^{-2} y'$, **o)** $\left(1 - t^2\right) y'' - ty' + y = 0$.

3.7 Solution des exercices sélectionnés

Solution de l'exercice 3.1.

a) L'équation différentielle $y'' + y' = t + 2$ est incomplète en y.

Posons donc $v = y'$ et remplaçons dans notre équation, on obtient

$$v' + v = t + 2,$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, avec second membre.

On résout d'abord l'équation sans second membre $v' + v = 0$ qui donne

$$v_h = \lambda e^{-t} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution de l'équation $v' + v = t + 2$, sous la forme

$$v_p = at + b$$

Puisque dans ce cas $v_p' = a$, on trouve que v_p est solution de l'équation si et seulement si,

$$a + at + b = t + 2.$$

Par identification, on trouve que

$$a = 1 \quad \text{et} \quad b = 1.$$

Donc la solution générale de l'équation $v' + v = t + 2$ est

$$v = t + 1 + \lambda e^{-t} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} y = \int v dt &= \int \left(t + 1 + \lambda e^{-t}\right) dt \\ &= t + \tfrac{1}{2}t^2 - \lambda e^{-t} + \mu,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) L'équation différentielle $ty'' = y' + t^2$ est aussi incomplète en y.

Posons $v = y'$ et remplaçons dans notre équation, on obtient

$$tv' = v + t^2,$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants, avec second membre.

On résout l'équation sans second membre $tv' = v$ qui donne

$$v_h = \lambda\, t \ \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution de l'équation $tv' = v + t^2$.

On peut utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire, on cherche la solution générale sous la forme $v = \lambda\,(t)\ t$. Il vient

$$t\ \left(\lambda'\,(t)\ t + \lambda\,(t)\right) = \lambda\,(t)\ t + t^2,$$

et donc

$$\lambda'\,(t) = 1,$$

ce qui permet, en intégrant de trouver

$$\lambda\,(t) = t.$$

D'où

$$v_p = t\, t = t^2$$

La solution générale de l'équation $tv' = v + t^2$ est donc

$$v = t^2 + \lambda\, t \ \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} y = \int v dt &= \int \left(t^2 + \lambda\, t\right) dt \\ &= \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{2}\lambda\, t^2 + \mu,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

c) L'équation différentielle $y^2y'' + y' = 0$ est incomplète en t.

La méthode pour résoudre cette équation différentielle consiste à prendre y comme nouvelle variable et $v = y'$ comme variable fonction inconnue en la variable y, c'est-à-dire

$$v : y \mapsto v(y) = y'.$$

On a donc

$$y'' = \frac{d}{dt}y' = \frac{d}{dt}v(y) = \frac{dy}{dt}\frac{dv}{dy} = y'\frac{dv}{dy} = v\frac{dv}{dy}.$$

Donc l'équation différentielle $y^2y'' + y' = 0$ devient

$$y^2v\frac{dv}{dy} + v = 0.$$

Si $v = 0$ alors $y' = 0$ et donc $y = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ sont des solutions.

Si $v \neq 0$, on obtient

$$y^2\frac{dv}{dy} + 1 = 0$$

ou bien

$$dv = -\frac{dy}{y^2}$$

qui est une équation à variables séparées de fonction inconnue $v(y)$.

En intégrant $\displaystyle\int dv = \int -\frac{dy}{y^2}$ on trouve

$$v = \frac{1}{y} + \lambda \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, on résout l'équation $y' = v$ *i.e.*

$$y' = \frac{1}{y} + \lambda,$$

qui est une équation à variables séparées

$$\left(\frac{y}{1 + \lambda y}\right)dy = dt$$

ou beaucoup mieux

$$\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda(\lambda y + 1)}\right)dy = dt$$

Par intégration on trouve les courbes intégrales

$$\lambda y - \mathrm{Log}\,|\lambda y + 1| = \lambda^2(t + \mu) \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 3.2.

a) L'équation différentielle $tyy'' - t\left(y'\right)^2 - yy' = 3t^2y^2$ peut s'écrire sous la forme

$$t\frac{y''}{y} - t\left(\frac{y'}{y}\right)^2 - \frac{y'}{y} = 3t^2,$$

qui est de type-homogène du second ordre.

La résolution de ces équations se fait en effectuant un changement de fonction inconnue en posant

$$u\left(t\right) = \frac{y'\left(t\right)}{y\left(t\right)} \text{ ou } y' = u\,y,$$

et donc

$$y'' = \left(u\,y\right)' = y'u + yu'.$$

D'où

$$\frac{y''}{y} = \frac{y'}{y}u + u' = u^2 + u'.$$

Et donc l'équation $t\frac{y''}{y} - t\left(\frac{y'}{y}\right)^2 - \frac{y'}{y} = 3t^2$ devient

$$u' - \frac{1}{t}u = 3t,$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, avec second membre.

La solution de l'équation sans second membre $u' - \frac{1}{t}u = 0$ est

$$y_h = \lambda t \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution de l'équation $u' - \frac{1}{t}u = 3t$.

On utilise la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire, on cherche la solution générale sous la forme $y = \lambda\left(t\right)\,t$. Il vient

$$\lambda'\left(t\right)\,t + \lambda\left(t\right) - \frac{1}{t}\lambda\left(t\right)\,t = 3t,$$

et donc

$$\lambda'\left(t\right) = 3,$$

ce qui permet, en intégrant de trouver

$$\lambda\left(t\right) = 3t.$$

D'où

$$u_p = 3t\,t = 3t^2.$$

La solution générale de l'équation $u' - \frac{1}{t}u = 3t$ est donc

$$u = 3t^2 + \lambda\, t \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il vient alors

$$\frac{y'}{y} = 3t^2 + \lambda\, t,$$

qui est une équation différentielle du premier ordre ayant pour solution générale

$$y = \mu e^{t^3+\lambda t^2},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 3.4.

Les équations différentielles en question sont linéaires d'ordre 2, à coefficients constants, avec second membre.

a) $y'' - 5y' + 6y = 2e^{4t}$.

L'équation homogène associée est

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Son équation caractéristique est

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

dont les racines sont

$$r_1 = 2 \quad \text{et} \quad r_2 = 3.$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc

$$y\,(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{3t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Comme

$$r_1 = 2 \neq 4 \quad \text{et} \quad r_2 = 3 \neq 4,$$

cherchons une solution particulière sous la forme

$$y_p = \alpha e^{4t}.$$

On a

$$y_p'\,(t) = 4\alpha e^{4t} \text{ et } y_p''\,(t) = 16\alpha e^{4t}.$$

Alors

$$y_p'' - 5y_p' + 6y_p = 16\alpha e^{4t} - 20\alpha e^{4t} + 6\alpha e^{4t} = 2\alpha e^{4t}.$$

Par identification, on trouve

$$\alpha = 1,$$

D'où

$$y_p = e^{4t}$$

Les solutions de l'équation non homogène sont donc

$$y(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{3t} + e^{4t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

b) $y'' - y' + y = 5$.

On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p = \alpha.$$

On a donc

$$y_p'' - y_p' + y_p = 0 - 0 + \alpha = 5.$$

D'où

$$y_p = 5.$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - y' + y = 0.$$

Son équation caractéristique est

$$r^2 - r + 1 = 0,$$

dont les racines sont

$$r_1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{et} \quad r_2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$y_h = \left(\lambda \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) e^{\frac{1}{2}t} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Finalement, la solution générale de l'équation avec second membre est

$$y = 5 + \left(\lambda \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) e^{\frac{1}{2}t} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

d) $y'' + y' - 2y = t + \cos t$.

On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p = \alpha t + \beta + \gamma \cos t + \delta \sin t.$$

En dérivant, on trouve

$$y_p' = \alpha - \gamma \sin t + \delta \cos t \quad \text{et} \quad y_p'' = -\gamma \cos t - \delta \sin t.$$

On a donc

$$\begin{aligned} y_p'' + y_p' - 2y_p &= -\gamma \cos t - \delta \sin t + \alpha - \gamma \sin t + \delta \cos t - 2\alpha t - 2\beta - 2\gamma \cos t - 2\delta \sin t \\ &= (\delta - 3\gamma) \cos t - (\gamma + 3\delta) \sin t - 2\alpha t + \alpha - 2\beta. \end{aligned}$$

Par identification, on cherche α, β, γ et δ satisfaisant le système

$$\begin{cases} \delta - 3\gamma = 1 \\ \gamma + 3\delta = 0 \\ -2\alpha = 1 \\ \alpha - 2\beta = 0. \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{4}, \quad \delta = \frac{1}{10} \quad \text{et} \quad \gamma = -\frac{3}{10}.$$

D'où

$$y_p = -\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{10} \cos t - \tfrac{3}{10} \sin t.$$

L'équation homogène associée est

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Son équation caractéristique est

$$r^2 + r - 2 = 0,$$

dont les racines sont

$$r_1 = -2 \quad \text{et} \quad r_2 = 1.$$

Les solutions de l'équation homogène sont alors les fonctions

$$y_h = \lambda e^{-2t} + \mu e^t \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, les solutions de l'équation non-homogène sont

$$y = y_h + y_p = \lambda e^{-2t} + \mu e^t - \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{10} \cos t - \tfrac{3}{10} \sin t \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 3.5.

a) Résolution de l'équation différentielle : $y'' + y = \dfrac{1}{\cos t}$.

L'équation homogène associée est

$$y'' + y = 0.$$

Son équation caractéristique est

$$r^2 + 1 = 0$$

dont les racines sont

$$r_1 = i \quad \text{et} \quad r_2 = -i.$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc

$$y_h = \lambda \cos t + \mu \sin t \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On utilise la méthode de variation des constantes, c'est-à-dire, on cherche la solution générale de l'équation non homogène sous la forme

$$y(t) = \lambda(t) \cos t + \mu(t) \sin t.$$

Les dérivées λ' et μ' doivent vérifier le système

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0, \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = c(t), \end{cases} \quad \text{avec } y_1 = \cos t, \ \ y_2 = \sin t \quad \text{et} \quad c(t) = \frac{1}{\cos t}.$$

Il vient alors

$$\begin{cases} \lambda' \cos t + \mu' \sin t = 0, \\ -\lambda' \sin t + \mu' \cos t = \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\lambda' = -\frac{\sin t}{\cos t} \qquad \text{et} \qquad \mu' = 1.$$

et par intégration on obtient

$$\lambda(t) = \operatorname{Log}(|\cos t|) + \alpha, \quad \mu(t) = t + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière de l'équation non homogène est donc

$$y_p = \cos t \operatorname{Log}(|\cos t|) + t \sin t$$

D'où la solution générale de l'équation non homogène est

$$y = y_h + y_p = \lambda \cos t + \mu \sin t + \cos t \operatorname{Log}(|\cos t|) + t \sin t \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 4

Théorie des équations différentielles

Sommaire

4.1 Théorie de Cauchy-Lipschitz 70

4.2 Exercices 72

4.3 Solution des exercices 72

4.1 Théorie de Cauchy-Lipschitz

Il arrive qu'on ne recherche pas toutes les solutions d'une EDO mais seulement celles qui vérifient certaines conditions, dites conditions initiales de Cauchy ou tout simplement conditions de Cauchy.

On considère le problème de Cauchy, ou problème à valeur initiale

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

avec t, $t_0 \in I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $y(t)$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue.

Définition 29

On dit que la fonction $y : I \to \mathbb{R}^n$ est solution de (4.1) si $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$, $y(t_0) = y_0$ et $\forall t \in I$, $y'(t) = f(t, y(t))$.

Définition 30

La fonction $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est lipschitzienne en y s'il existe une constante L, appelée la constante de Lipschitz de f, telle que :

$$\forall t \in I, \forall\ y,\ z \in \mathbb{R}^n, \|f(t, y) - f(t,\ z)\| \leq L \|y - z\| .$$

Le théorème fondamental de ce chapitre est le suivant.

Théorème 31 Cauchy - Lispchitz - f lipschitzienne

Soit la fonction f, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, continue sur $[t_0,\ t_0 + a] \times \mathbb{R}^n$ et lipschitzienne par rapport à y. Alors, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$ il existe une unique fonction $y \in \mathcal{C}^1\left([t_0,\ t_0 + a], \mathbb{R}^n\right)$ qui vérifie

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \forall t \in [t_0, t_0 + a] \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{4.2}$$

.

.

.

À compléter

.

.

.

4.2 Exercices

Exercice 4.1

Soit $a \in]0,1[$. On considère le problème de Cauchy (P_1) : $\begin{cases} y' = |y|^a \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

a) Vérifier que la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(t) = \begin{cases} ((1-a)\,t)^{\frac{1}{1-a}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

est solution du problème de Cauchy (P_1).

b) Conclure.

Exercice 4.2

On considère l'équation différentielle $y' = t + y^2$.

a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale sur $]a,b[$ qui vérifie $y(0) = 0$.

b) Montrer que b est finie ($b < +\infty$).

c) On accepte que $\lim\limits_{t\to b^-} \int_\alpha^t y^2(s)\,ds = +\infty$, $\alpha > a$. En déduire que $\lim\limits_{t\to b^-} y(t) = +\infty$.

Exercice 4.3

On considère l'équation différentielle $y' = 1 + ty^3$.

a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale qui vérifie $y(0) = 0$.

b) Montrer que y est une fonction impaire.

c) Étudier le signe et la monotonie de y.

4.3 Solution des exercices

Solution de l'exercice 4.1.

a) Si $a \in]0,1[$, alors $\frac{1}{1-a} > 1$. On a donc pour $t = 0$,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{y(t) - y(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^+} \frac{((1-a)\,t)^{\frac{1}{1-a}} - 0}{t-0} = 0 \text{ et } \lim_{t\to 0^-} \frac{y(t) - y(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^-} \frac{0-0}{t-0} = 0.$$

La fonction y est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$y'(t) = \left.\begin{cases} ((1-a)\,t)^{\frac{a}{1-a}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}\right| = |y(t)|^a.$$

Il vient que $y(t) = \begin{cases} ((1-a)\,t)^{\frac{1}{1-a}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ est solution du problème de Cauchy (P_1).

b) On remarque que la fonction identiquement nulle $y \equiv 0$ est une autre solution de notre problème.

Non unicité de la solution vient du fait que la fonction $f(t,y) = |y|^a$ n'est pas localement lipschitzienne au voisinage de $y = 0$.

Solution de l'exercice 4.2.

a) La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(t,y) = t + y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites (continuité en t et lipschitziennité locale en y).

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert $I =]a,b[$ contenant 0.

b) Si $b = +\infty$, alors pour $t \geq 1$, $y'(t) \geq 1 + y^2(t)$ et donc

$$\frac{y'(t)}{1+y^2(t)} \geq 1.$$

En intégrant,

$$\int_1^t \frac{y'(s)}{1+y^2(s)} ds \geq \int_1^t ds,$$

on obtient

$$\text{Arctg}(y(t)) - \text{Arctg}(y(1)) \geq t - 1.$$

Ce qui est absurde car la fonction Arctg est bornée.

c) Pour $t \geq \alpha$ on a

$$\int_\alpha^t y'(s)\, ds = \int_\alpha^t \left(s + y^2(s)\right) ds,$$

ce qui implique

$$y(t) = y(\alpha) + \frac{t^2 - \alpha^2}{2} + \int_\alpha^t y^2(s)\, ds$$

et donc

$$\lim_{t\to b^-} y(t) = y(\alpha) + \frac{b^2 - \alpha^2}{2} + \lim_{t\to b^-} \int_\alpha^t y^2(s)\, ds.$$

Comme $\lim\limits_{t\to b^-} \int_\alpha^t y^2(s)\, ds = +\infty$, alors $\lim\limits_{t\to b^-} y(t) = +\infty$.

Solution de l'exercice 4.3.

a) La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(t,y) = 1 + ty^3$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites (continuité en t et lipschitziennité locale en y).

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ contenant 0.

b) Considérons la fonction définie sur $]-b, -a[$ par $z(t) = -y(-t)$.

On a

$$z'(t) = (-y(-t))' = y'(-t) = 1 + (-t)(y(-t))^3 = 1 + t(z(t))^3$$

et

$$z(0) = -y(-0) = 0.$$

On observe que z est solution du problème de Cauchy posé et est donc restriction de la solution maximale y. On en déduit $]-b, -a[\subset]a, b[$ donc $a = -b$ et

$$y(t) = z(t) = -y(-t) \quad \text{sur} \quad]-b, b[\,.$$

Ceci montre que y est une fonction impaire.

c) On a $y'(0) = 1$ et $y(0) = 0$, la solution y est donc strictement positive sur un intervalle $]0, t_0[$. Si $t_0 < b$ avec $y(t_0) = 0$, alors d'après le théorème des accroissements finies, il existe $c \in]0, t_0[$ tel que

$$y'(c) = 1 + c(y(c))^3 = 0$$

et donc

$$y(c) = -\frac{1}{\sqrt[3]{c}} < 0.$$

Ceci contredit le fait que la fonction y est strictement positive sur $]0, t_0[$.

Alors, la solution y est strictement positive sur $]0, b[$. Comme elle est impaire, donc elle est strictement négative sur $]-b, 0[$. On en déduit que

$$y'(t) = 1 + t(y(t))^3 > 0,$$

la solution y est alors strictement croissante sur l'intervalle $]-b, b[\,.$

Références

[1] **Demailly J.-P.** Analyse numérique et équations différentielles. Collection Grenoble Sciences, 2011. 6

[2] **Giroux A.** Équations différentielles. Département de mathématiques et statistique, Université de Montréal, 2010.

[3] **Hulin D.** Équations différentielles – M304 – L3 MFA – Université Paris-Sud, 2013.

[4] **Krasnov M. L., Kiselev A. I., Makarenko G. I.** Recueil de Problèmes sur les Équations Différentielles Ordinaires, Éditions Mir, 1987.