

Résumé 2 (suite et fin)

4- Systèmes d'équations différentielles linéaires et non linéaires. Plan de phase, points critiques et stabilité

4.1 Contexte et définitions Un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

est appelé autonome (la variable « t » n'apparaît pas à droite). Les fonctions f et g sont supposées de classe C^1 dans une certaine région R du plan des xy , appelé ici plan de phase du système. Le théorème 3.4 du résumé 1 nous assure que, étant donné un t_0 et un quelconque point $(x_0, y_0) \in R$, il y a une unique solution (on dit souvent *trajectoire*) $x = x(t)$ et $y = y(t)$ du système, solution définie sur un intervalle ouvert contenant t_0 et satisfaisant $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = y_0$. Un point (x_*, y_*) tel que $f(x_*, y_*) = g(x_*, y_*) = 0$ est dit point critique du système. Un tel point est toujours une solution du système (dite solution stationnaire ou d'équilibre). Pour un tel point, le champ de pentes de l'équation différentielle (appelé ici champ de direction)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

présente une indétermination du type 0/0. Lorsqu'on dessine le champ de direction du système d'É.D. avec des trajectoires, on obtient ce qu'on appelle le portrait de phase.

4.1.1 Cas particulier Soit \mathbf{A} une matrice constante, 2×2 , inversible et considérons le système linéaire

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y} \text{ où } \mathbf{y} = [y_1 \ y_2]^T \text{ et où } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Remarquez qu'il s'agit d'un cas particulier du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

En effet, $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ prend alors la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \end{cases}$$

avec x remplacé par y_1 et y remplacé par y_2 . Puisque \mathbf{A} est supposée inversible, alors le seul point critique du système $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ est $(0, 0)$ et $\lambda = 0$ ne peut pas être une valeur propre de \mathbf{A} . Ainsi, l'origine est un point critique isolé et c'est le seul point critique. Les valeurs propres de \mathbf{A} sont

$$\lambda = \frac{\text{Tr} \pm \sqrt{\text{Tr}^2 - 4\text{Det}}}{2} \quad (= \lambda_1, \lambda_2)$$

où $\text{Tr} = a_{11} + a_{22}$, $\text{Det} = \det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2$. Il y a donc 5 cas à considérer. On peut avoir 2 valeurs propres réelles distinctes (même signe ou signe opposé), 2 valeurs propres réelles égales (valeur propre double) et deux valeurs propres complexes conjuguées (partie réelle nulle ou non). Et la solution du système $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ a la forme suivante :

- Si \mathbf{A} possède 2 valeurs propres réelles distinctes λ_1, λ_2 avec $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ des vecteurs propres correspondants respectifs, alors $\mathbf{y} = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$ où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires. Les exemples 4.2.1 et 4.2.2 traitent ce cas.
- Supposons que \mathbf{A} possède une valeur propre double λ . Si \mathbf{A} n'est pas déjà diagonale, elle n'est pas diagonalisable (revoir l'exemple 2.6 pour un tel cas). Alors on a une première solution $\mathbf{y}_1 = e^{\lambda t} \mathbf{v}_1$ où \mathbf{v}_1 est le seul vecteur propre (à multiple près) qu'on a pu trouver. On trouve un vecteur propre généralisé \mathbf{v}_2 et la seconde solution sera (revoir l'exemple 3.14.1) $\mathbf{y}_2 = e^{\lambda t} (t \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$. L'exemple 4.2.3 dans sa seconde partie traite ce cas. Si par contre \mathbf{A} est déjà diagonale, alors c'est un cas facile et les courbes solutions sont une famille de droite comme l'exemple 4.2.3 le début de l'exemple 4.2.3 le montrera.
- Si \mathbf{A} possède des valeurs propres complexes $a \pm bi$, elle n'est pas diagonalisable (dans les réels : revoir l'exemple 2.6, matrice \mathbf{B}) On sait qu'on trouve un vecteur propre complexe $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i \mathbf{v}$ associé à la valeur propre $a + b i$ et les parties réelle et imaginaire de la solution complexe $e^{(a+bi)t} (\mathbf{u} + i \mathbf{v})$ sont deux solutions indépendantes. Les exemples 4.2.4 et 4.2.5 vont dans ce sens.

Allons-y donc avec de exemples pour illustrer chacun des cas précédents. Le solveur numérique RK de Nspire a été utilisé pour tracer le plan de phase qui consiste en le graphique du champ de pentes obtenu en calculant dy_1/dy_2 à partir de $\frac{dy_1}{dt} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2$ et $\frac{dy_2}{dt} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2$ et de quelques trajectoires. Notez que nous avons choisi le paramètre t entre 0 et 10 et des conditions initiales quelconques. Une résolution symbolique était évidemment possible par exponentiation

de la matrice A et un tracé en mode paramétrique aurait pu être ensuite fait mais la précision du solveur RK et la fenêtre 2D en mode entrée É.D. est fort intéressante dans Nspire. De toutes façons, nos exemples donnent la solution symbolique par calcul des valeurs propres. Autre remarque : à l'exception de certains cas, il n'est pas très utile de résoudre l'É.D. $\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}$ puisque sa solution est très souvent une expression implicite qui ne nous renseigne pratiquement pas sur l'allure du graphique.

4.2 Exemples traitant toutes les possibilités

4.2.1 Soit $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ On trouverait -2 et -4 comme valeurs propres et la solution générale suivante : $\mathbf{y} = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. En d'autres termes, pour bien comprendre la notation, nous avons ici $\mathbf{y} = c_1 \mathbf{y}_1 + c_2 \mathbf{y}_2$ où $\mathbf{y}_1 = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{y}_2 = e^{-4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Ou si l'on préfère $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ avec $y_1 = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$ et $y_2 = c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-4t}$.

En faisant des choix de constantes, on obtient une famille de trajectoires. Si l'on change A de signe, alors les valeurs propres changent de signe, on conserve les mêmes vecteurs propre et la différence, c'est que les trajectoires, plutôt que de se diriger vers l'origine, s'en éloignent lorsque t augmente. On aurait un portrait comme celui-ci :

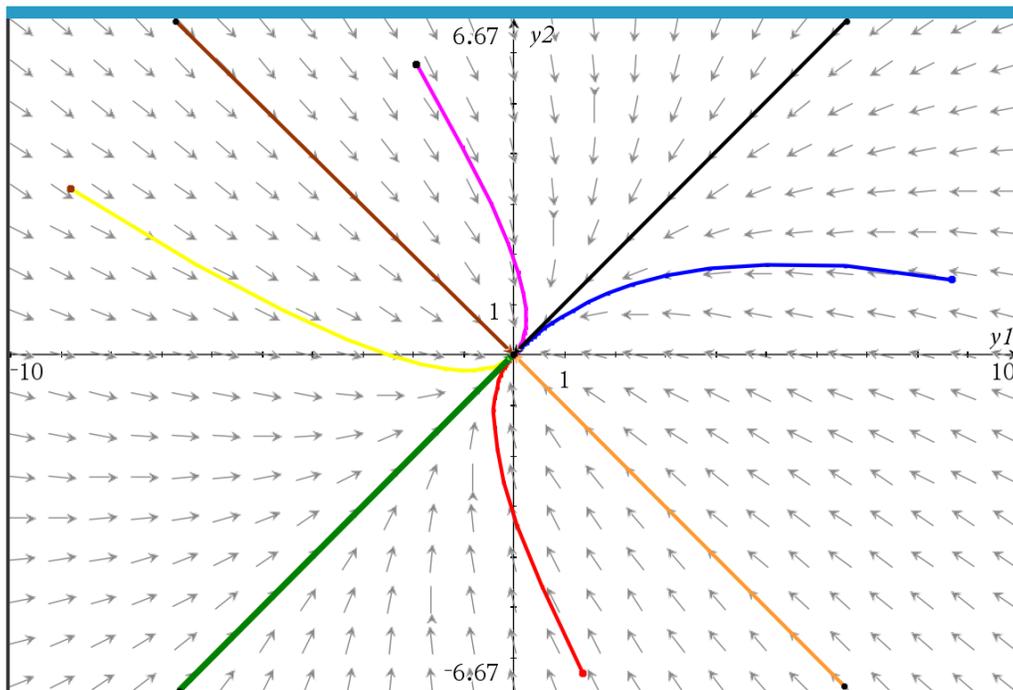


Figure 4.1

On remarque que toutes les trajectoires, sauf 2 d'entre elles, ont la même droite tangente de direction (ici c'est la droite $y_2 = y_1$ à cause du vecteur $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$) ; les 2 trajectoires exceptionnelles ont elles aussi une même droite tangente de direction, la droite $y_2 = -y_1$, mais différente. Cela est dû au fait de la dominance d'une exponentielle sur l'autre. On dit ici que $(0, 0)$ est un noeud impropre.

4.2.2 Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dont les valeurs propres sont ± 1 (ou bien considérez $-\mathbf{A}$ dont les valeurs

propres sont encore ± 1). On trouve facilement des vecteurs propres $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et alors

$y_1 = c_1 e^t$, $y_2 = c_2 e^{-t}$. Donc $y_1 y_2 = c$ où c est une constante, donc une famille d'hyperboles, on dit que l'origine est un col ou point de selle.

On remarque ici qu'il y a 2 trajectoires qui se dirigent vers l'origine, 2 autres qui s'en éloignent et toutes les autres ne passent pas par l'origine. Les deux trajectoires qui se dirigent vers l'origine sont obtenues en faisant le choix $c_1 = 0$ de sorte que $y_1 = 0$ et $y_2 = c_2 e^{-t}$. Alors si c_2 est choisi positif, on part sur l'axe vertical dans sa partie supérieure et se dirige vers l'origine tandis que si c_2 est choisi négatif on part encore sur l'axe vertical mais de sa partie inférieure et se dirige vers l'origine. On fait la même analyse pour les deux trajectoires sur l'axe horizontal (l'axe y_1)

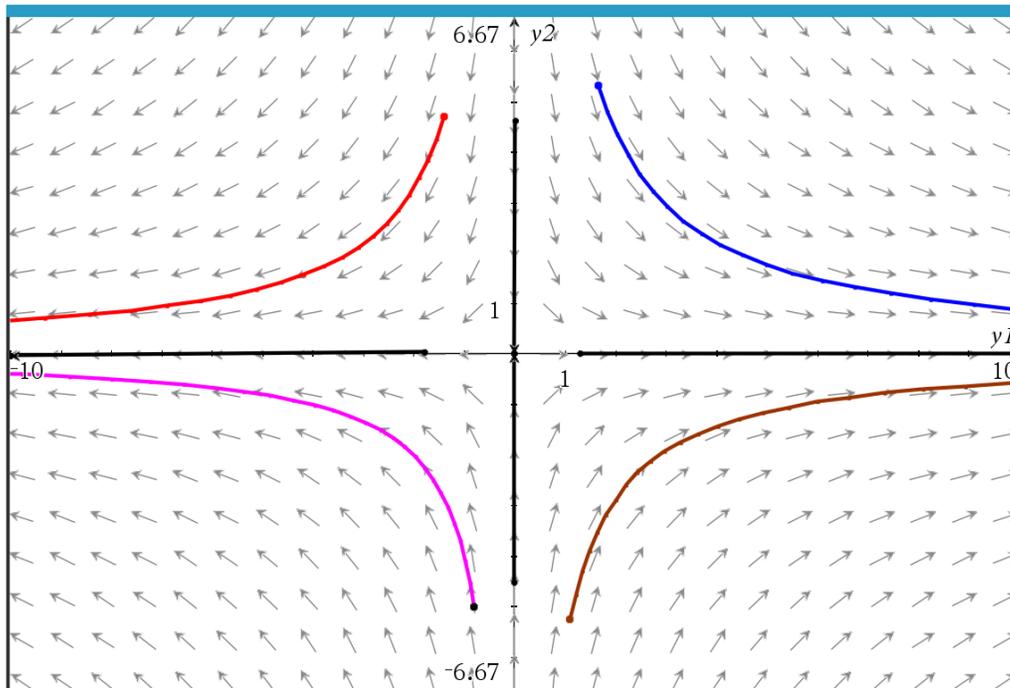


Figure 4.2

4.2.3 Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ une matrice déjà diagonale ayant une valeur propre double égale à 1

La solution est évidente ici, aucun calcul requis : $y_1 = c_1 e^t$, $y_2 = c_2 e^t \Rightarrow c_1 y_1 = c_2 y_2$, une famille de droite, un foyer. Voir la figure 4.3.

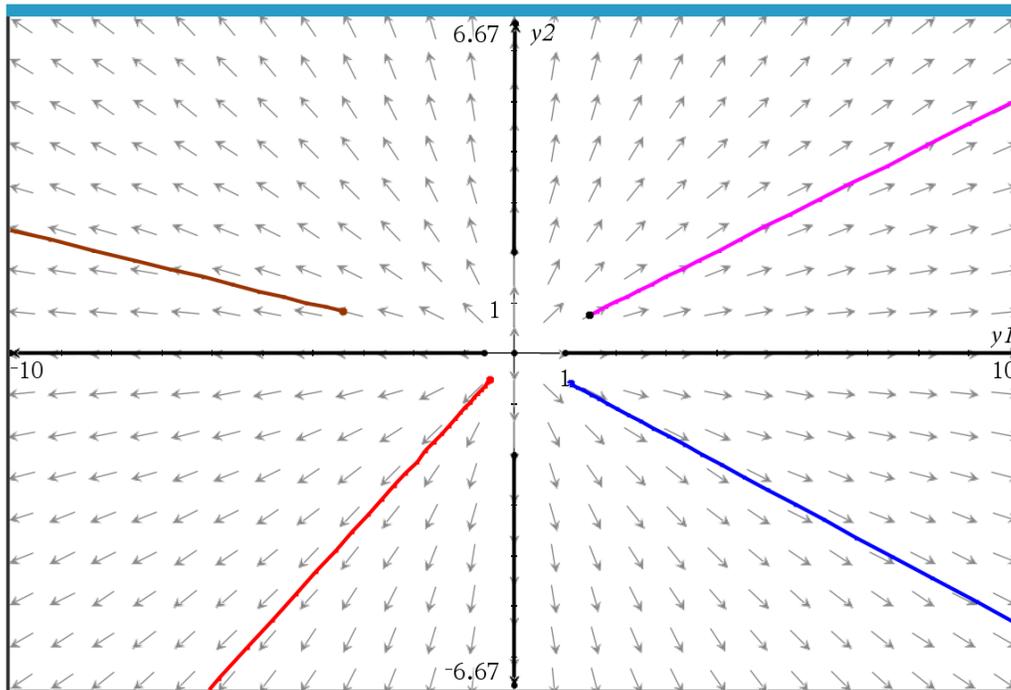


Figure 4.3

Si maintenant $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, alors \mathbf{A} n'est pas déjà diagonale mais possède encore une valeur propre double, à savoir 3. Un vecteur propre associé est $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ et un vecteur propre généralisé possible est $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. D'après 3.14.1, deux solutions indépendantes sont alors

$$e^{3t} \mathbf{v}_1 \text{ et } e^{3t} (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)$$

et la solution générale est en est une combinaison linéaire :

$$\mathbf{y} = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Il y a donc une seule direction propre. On dit alors que l'origine est un noeud impropre ou dégénéré (impropre dans un sens différent que tantôt). Voir la figure 4.4.

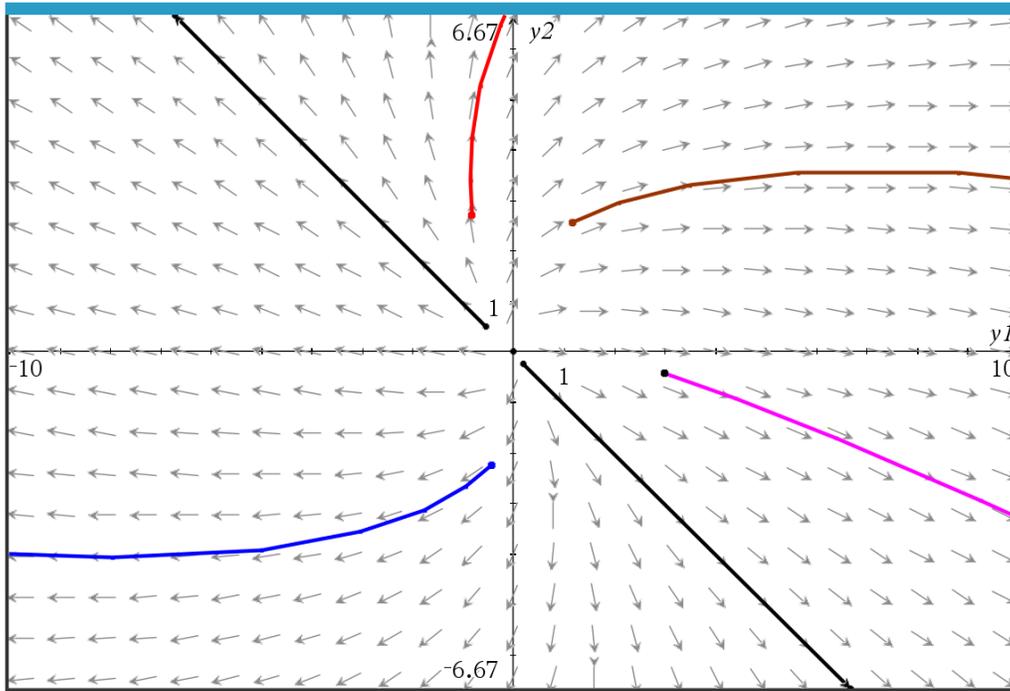


Figure 4.4

4.2.4 Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ une matrice dont les valeurs propres sont complexes et évidemment égales à $-1 \pm i$ puisqu'on a déjà la forme canonique. Un vecteur propre (complexe) associé à la valeur propre $-1 + i$ est $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ et alors 2 solutions (réelles) linéairement indépendantes sont données par $\mathbf{y}_1 = \text{Re}(e^{(-1+i)t} \mathbf{w})$, $\mathbf{y}_2 = \text{Im}(e^{(-1+i)t} \mathbf{w})$. On trouve une famille de spirales

$$\mathbf{y} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

Le plan de phase est dessiné à la figure 4.5. On a ici un bel exemple montrant que la solution du système nous informe beaucoup plus que la solution de l'É.D. obtenue en éliminant le temps t . En effet, on aurait l'É.D.

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{-y_1 - y_2}{-y_1 + y_2}$$

qu'on peut résoudre par la méthode des É.D. du premier ordre dites « homogènes » et dont la solution est la famille de courbes implicites

$$2 \arctan\left(\frac{y_2}{y_1}\right) - \ln\left(\frac{1}{y_1^2}\right) - \ln(y_1^2 + y_2^2) = 2 \ln(y_1) + C$$

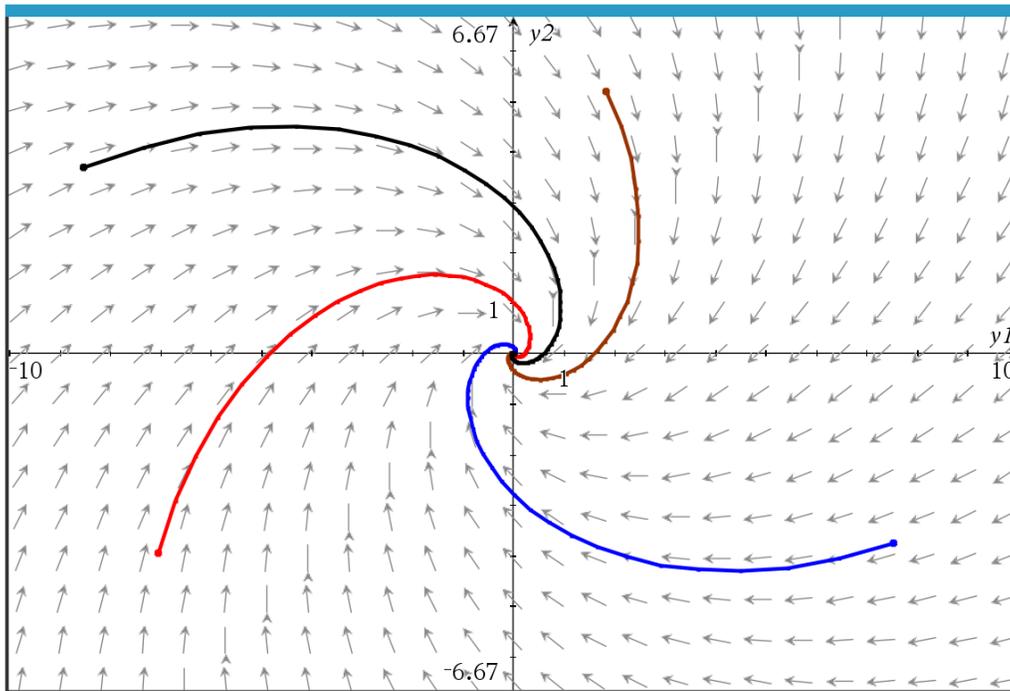


Figure 4.5

4.2.5 Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ dont les valeurs propres sont imaginaires pures, $\pm 2i$. Un vecteur propre

associé à la valeur propre $2i$ est $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$ et deux solutions indépendantes seraient alors

$\mathbf{y}_1 = \text{Re}(e^{2it} \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -2\sin(2t) \end{bmatrix}$ et $\mathbf{y}_2 = \text{Im}(e^{2it} \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ 2\cos(2t) \end{bmatrix}$. La solution du système est donc

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -2\sin(2t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ 2\cos(2t) \end{bmatrix},$$

C'est une famille d'ellipses puisque la solution implique que $2y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 = c = \text{constante}$ (on peut réussir à éliminer le paramètre « t »). De toutes façons, ici le système implique que l'on a l'É.D.

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{-4y_1}{y_2} \quad \Rightarrow \quad y_2 dy_2 = -4y_1 dy_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y_2^2}{2} + 2y_1^2 = C.$$

On dit que l'origine est un centre comme le montre la figure 4.6.

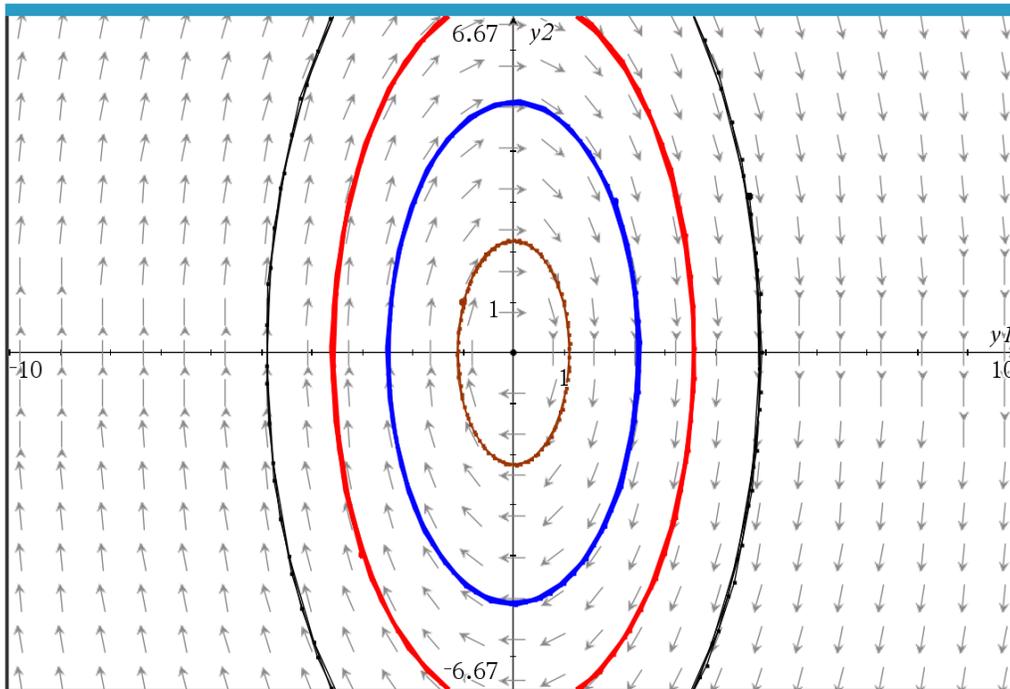


Figure 4,6

Résumons en ce qui concerne la terminologie associée à la nature du point critique du système $\frac{dy}{dt} = \mathbf{A}y$ où \mathbf{A} est une matrice constante, 2×2 , inversible :

4.3 Définition Nature du point critique (0, 0) et terminologie :

Valeurs propres de \mathbf{A}	Nature du point critique
Réelles, de même signe, distinctes	Noeud
Réelles, de signe contraire, distinctes	Col (point de selle)
Réelles et égales	Foyer (ou noeud propre (« étoile ») : \mathbf{A} déjà diagonale) ou Noeud impropre (ou dégénéré : \mathbf{A} non diagonale)
Complexes conjuguées	Spirale
Imaginaires pures	Centre

Figure 4.7

4.4 Remarque Un noeud est aussi appelé une source ou un puits, dépendant si toutes les trajectoires s'en approchent ou s'éloignent.

4.5 Définitions Un point critique (x_*, y_*) du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

est dit stable si, lorsque le point initial (x_0, y_0) est suffisamment proche de (x_*, y_*) , alors la trajectoire $(x(t), y(t))$ reste près de (x_*, y_*) pour tout $t > 0$. Plus précisément, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_*\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*\| < \varepsilon \quad (t > 0)$$

où la norme est la norme euclidienne et où, par exemple, $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$. C'est le cas d'un noeud impropre qui est une source. Si le point critique n'est pas stable, il est dit instable. Le point critique (x_*, y_*) est dit asymptotiquement stable s'il est stable et si, en plus, toute trajectoire qui commence suffisamment proche de (x_*, y_*) tend vers (x_*, y_*) lorsque $t \rightarrow +\infty$. Donc, cela signifie qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_*$$

On a alors le résultat suivant, dont la démonstration immédiate découle de l'analyse des pages précédentes :

4.6 Théorème Soit \mathbf{A} une matrice 2×2 inversible (donc 0 n'est pas une de ses valeurs propres). On considère le système linéaire

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

dont $(0, 0)$ est le seul point critique. Soient λ_1, λ_2 les 2 valeurs propres de \mathbf{A} . Alors, le point critique $(0, 0)$ est

- a) asymptotiquement stable si les parties réelles de λ_1 et λ_2 sont toutes deux négatives (Note : si λ_1, λ_2 sont réelles, elles sont leurs propres parties réelles !)
- b) stable mais non asymptotiquement stable si les parties réelles de λ_1 et λ_2 sont toutes les deux nulles (donc $\lambda_1, \lambda_2 = \pm bi$).
- c) instable si λ_1 ou λ_2 possèdent une partie réelle positive. ♦

4.7 Résumé Voici les propriétés de stabilité du système linéaire $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}$, \mathbf{A} matrice d'ordre deux et inversible ($\det(\mathbf{A}) \neq 0$).

Valeurs propres	Type des points critiques	Stabilité
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Noeud	Instable
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Noeud	Asymptotiquement stable
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Point de selle	Instable
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Noeud propre ou impropre	Instable
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Noeud propre ou impropre	Asymptotiquement stable
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm bi$ $a > 0$ $a < 0$	Spirale	Instable Asymptotiquement stable
$\lambda_1 = bi, \lambda_2 = -bi$	Centre	Stable

Figure 4.8

Nous n'avons pas l'intention ni la compétence de nous lancer dans l'étude des systèmes d'É.D. non linéaires complexes. Par contre, les systèmes « presque linéaires » (« almost linear systems ») qu'on appelle quasi linéaires se comportent sensiblement comme les systèmes linéaires. Nous en parlons maintenant.

4.8 Définition Soit \mathbf{A} une matrice carrée d'ordre n constante, soit \mathbf{F} un champ de vecteurs et considérons un système d'équations différentielles de la forme

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

où $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est un point critique isolé (donc, on peut trouver un disque centré en $\mathbf{0}$ à l'intérieur duquel il n'y a pas d'autres points critiques). On suppose, en plus, que $\det \mathbf{A} \neq 0$, donc $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est aussi un point critique isolé du système $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Le système est dit système quasi linéaire au voisinage de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ si \mathbf{F} admet des dérivées partielles continues et satisfait à la condition

$$\frac{\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$$

4.9 Exemple Une façon d'obtenir un système quasi linéaire consiste à « linéariser » un système. En effet, considérons de nouveau le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

On suppose que les fonction f et g sont différentiables en (x_0, y_0) . Donc,

$$f(x_0 + u, y_0 + v) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v + R_f(u, v)$$

$$g(x_0 + u, y_0 + v) = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)v + R_g(u, v)$$

où les restes satisfont $\frac{R_f(u, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}} \rightarrow 0$ et $\frac{R_g(u, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}} \rightarrow 0$ lorsque $\sqrt{u^2 + v^2} \rightarrow 0$.

Si l'on suppose en plus que le point (x_0, y_0) est un point d'équilibre du système original et si l'on effectue le changement de variables $x = x_0 + u$, $y = y_0 + v$, tout cela est transformé en

$$\begin{cases} u' = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v + R_f(u, v) \\ v' = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)v + R_g(u, v) \end{cases}$$

et donc pour les valeurs de (u, v) près de l'origine, les restes $R_f(u, v)$ et $R_g(u, v)$ sont petits et le dernier système peut être comparé au système suivant, dit linéarisation du système original au point d'équilibre (x_0, y_0) :

$$\begin{cases} \tilde{u}' = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\tilde{u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\tilde{v} \\ \tilde{v}' = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\tilde{u} + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\tilde{v} \end{cases}$$

Si l'on note $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}$ et que \mathbf{J} désigne la matrice jacobienne du champ vectoriel

$\mathbf{G} = [f(x, y) \quad g(x, y)]^T$ évaluée en (x_0, y_0) , on a donc $\mathbf{u}' = \mathbf{J}\mathbf{u}$. Remarquons que le système précédent est linéaire, à coefficients constants. Donc, le théorème 4.6 s'applique si $\det(\mathbf{J}) \neq 0$.

4.10 Exemple Considérons le système quasi linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 2y + 2x^2 - 3y^2 \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 3y + 7xy \end{cases}$$

Quasi linéaire puisque $\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} 2x^2 - 3y^2 \\ 7xy \end{bmatrix}$ est tel que $\frac{\|\mathbf{F}(x, y)\|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0$ si $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ comme

on peut le vérifier en utilisant les coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$. En effet, un calcul direct

montre que $\frac{\|\mathbf{F}(r \cos \theta, r \sin \theta)\|}{\|(r \cos \theta, r \sin \theta)\|} = r\sqrt{24 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 5 \sin^2 \theta + 4}$ ce qui tend bien vers 0 si r tend vers 0.

Les points critiques du système sont $(0, 0)$, $(0.93, -1.06)$, $(0.28, 1.06)$ et $(-2.35, -0.48)$ comme on peut le vérifier (on peut même les trouver en mode exact). Il est bon de choisir une fenêtre « pas trop grande » ici puisque les 4 points critiques sont tous dans un voisinage de l'origine. Ensuite, nous pourrons « zoomer » sur un point critique en particulier. Des points de conditions initiales pris au hasard laissent présager que le point critique $(-2.25, -0.48)$ semble être un nœud asymptotiquement stable selon ce qu'en montre le figure 4.9. On voudrait analyser chacun des points critiques.

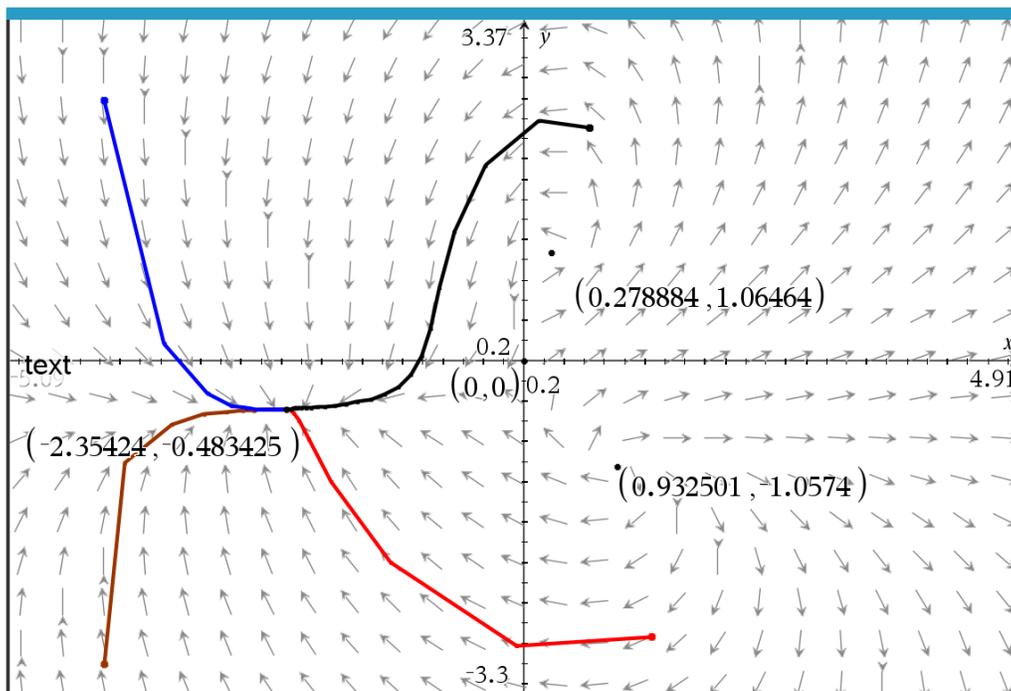


Figure 4.9

Afin de poursuivre cet exemple, nous aurons besoin du théorème suivant (non démontré) qui permet de dire que, sauf dans le cas de valeurs propres imaginaires pures ou de valeurs propres réelles doubles, le système quasi linéaire

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

(\mathbf{A} matrice carrée d'ordre deux) se comporte comme le système linéaire lorsque \mathbf{x} est petit. En d'autres mots, si nous ne sommes pas en présence de valeurs propres imaginaires pures ou réelles doubles, un terme non linéaire petit n'affecte pas le type et la stabilité du point critique.

4.11 Théorème Soient λ_1, λ_2 les valeurs propres du système linéaire

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Ay}$$

correspondant au système quasi-linéaire

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Alors le type et la stabilité du point critique $(0, 0)$ sont donnés dans le tableau suivant :

Valeurs propres	Système linéaire		Système quasi-linéaire	
	Type	Stabilité	Type	Stabilité
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Noeud	Instable	Noeud	Instable
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Noeud	Asympt. stable	Noeud	Asympt. stable
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Point de selle	Instable	Point de selle	Instable
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Noeud imp. ou pr.	Instable	Noeud ou Spirale	Instable
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Noeud imp. ou pr.	Asympt. stable	Noeud ou Spirale	Asympt. stable
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm bi$ $a > 0$ $a < 0$	Spirale	Instable Asympt. stable	Spirale	Instable Asympt. stable
$\lambda_1 = bi, \lambda_2 = -bi$	Centre	Stable	Centre ou Spirale	Indéterminée

Figure 4.10

4.12 Suite de l'exemple 4.10 Regardons la nature des 4 autres points critiques. La matrice jacobienne de

$$\mathbf{G}(x, y) = \begin{bmatrix} 4x + 2y + 2x^2 - 3y^2 \\ 4x - 3y + 7xy \end{bmatrix}$$

est donnée par

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 4 + 4x & 2 - 6y \\ 4 + 7y & -3 + 7x \end{bmatrix}.$$

La séance suivante de Nspire montre les calculs requis :

<code>mat:=zeros({4·x+2·y+2·x²-3·y²,4·x-3·y+7·x·y},{x,y})</code>	<code>0.932501 -1.0574</code>
	<code>0.278884 1.06464</code>
	<code>0 0</code>
	<code>-2.35424 -0.483425</code>
<code>jac(x,y):={4+4·x 2-6·y 4+7·y -3+7·x}</code>	<i>Done</i>
<code>nat(i):=eigVl(jac(mat[i,1],mat[i,2]))</code>	<i>Done</i>
<code>nat(1)</code>	<code>{5.62876+4.89603·i,5.62876-4.89603·i}</code>
<code>nat(2)</code>	<code>{2.03386+6.38395·i,2.03386-6.38395·i}</code>
<code>nat(3)</code>	<code>{5,-4}</code>
<code>nat(4)</code>	<code>{-5.20548,-19.6912}</code>

Figure 4.11

On retourne voir la figure 4.10 (tableau) et on peut affirmer que $(0.93, -1.06)$ et $(0.28, 1.06)$ correspondent à une spirale instable, que l'origine $(0, 0)$ est un point de selle (instable) et que $(-2.35, -0.48)$ correspond à un noeud asymptotiquement stable.

4.13 Exemple Pendule simple, intégrale elliptique. Soit un objet de masse m attaché au bout d'une tige de longueur L dont la masse est négligeable par rapport à l'objet. Considérons la figure suivante :

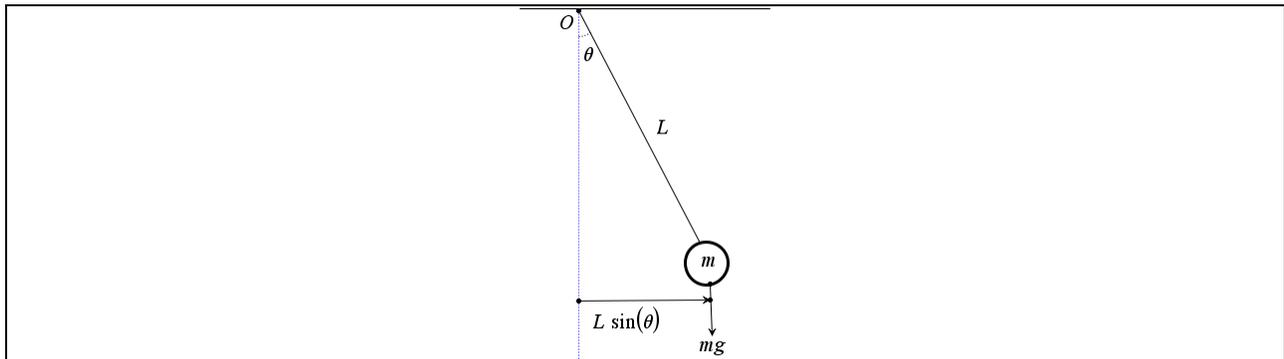


Figure 4.12

Soit $\theta(t)$ l'angle à l'instant t entre la verticale et la tige, le sens positif étant le sens anti-horaire. On peut supposer une force de résistance proportionnelle à la vitesse avec « c » la constante de proportionnalité. On peut montrer que l'équation différentielle obtenue sera

$$mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -cL \frac{d\theta}{dt} - mgL \sin(\theta).$$

Ce qui peut se réécrire sous la forme

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \alpha \frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \sin(\theta) = 0$$

où l'on a posé $\alpha = \frac{c}{mL}$, $\omega^2 = \frac{g}{L}$. Traitons le cas où l'on néglige la force de résistance, donc

$c = 0$ et donc $\alpha = 0$. En posant $\theta(t) = x(t)$, $y = \frac{dx}{dt}$, on transforme cette É.D. du deuxième ordre en le système (non linéaire) du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x \end{cases}$$

On va supposer les conditions initiales suivantes : $x(0) = \theta(0) = \alpha$, $y(0) = \theta'(0) = 0$. On peut déjà trouver les trajectoires puisque, du système ci-haut, on tire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega^2 \sin x}{y}$$

d'où, par intégration de cette É.D. séparable, par utilisation de la c.i. $y(\alpha) = 0$ et par utilisation de l'identité trigonométrique du double de l'angle, on trouve

$$y^2 = 2\omega^2 (\cos x - \cos \alpha) = 4\omega^2 \left(\sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right).$$

Soit $E = 2\omega^2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)$. Alors, $y = \pm \sqrt{2E - 4\omega^2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}$. On voit donc que la quantité sous le radical demeure positive if $E > 2\omega^2$ (il y avait suffisamment d'énergie pour que le pendule tourne toujours, pas d'oscillation). Si $0 < \alpha < \pi$, alors $E < 2\omega^2$ et il y aura des oscillations.

Cela sera mieux compris si l'on remarque que les points critiques du système sont de la forme $(n\pi, 0)$ $n \in \mathbb{Z}$. Remarquons que le théorème 4.11 s'appliquera car il s'agit bien d'un système quasi linéaire puisqu'on peut écrire

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x = -\omega^2 x + \omega^2 \frac{x^3}{3!} - \dots \end{cases}$$

Ou si l'on préfère : $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x})$ avec $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega^2 x^3}{6} - \frac{\omega^2 x^5}{120} + \dots \end{bmatrix}$

La matrice jacobienne du système est

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos(x) & 0 \end{bmatrix}$$

et les valeurs propres de $\mathbf{J}(n\pi, 0)$ sont $\pm \omega \sqrt{(-1)^{n+1}}$. On en déduit que les points de la forme $(2n\pi, 0)$ $n \in \mathbb{Z}$ sont des centres stables et que ceux de la forme $((2n+1)\pi, 0)$ $n \in \mathbb{Z}$ sont des points de selle instables (cela correspond à ce qu'on s'attend physiquement).

Revenons à $y^2 = 2\omega^2 (\cos x - \cos \alpha)$ et trouvons la période d'oscillation T . On a

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{g}{L} (\cos \theta - \cos \alpha).$$

Ainsi, $dt = -\sqrt{\frac{L}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}}$ puisque θ décroît quand t croît (pour t petit). Mais alors, en

utilisant la notation $k = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, la formule du double de l'angle et le changement de variables

$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = k \sin z$, on peut montrer que (détails en classe)

$$T = 4 \sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$$

où $F(k, \phi) \equiv \int_0^\phi \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 z}}$ est appelée intégrale elliptique de première espèce. Remarquons

que si α tend vers 0, alors la période d'oscillation tend vers la période $4 \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\omega}$, qui est

celle du système linéaire $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x \end{cases}$ ou de l'É.D. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$. En classe, nous regarderons le

plan de phase et différentes trajectoires. Et une animation permettra de mesurer la période d'oscillation :

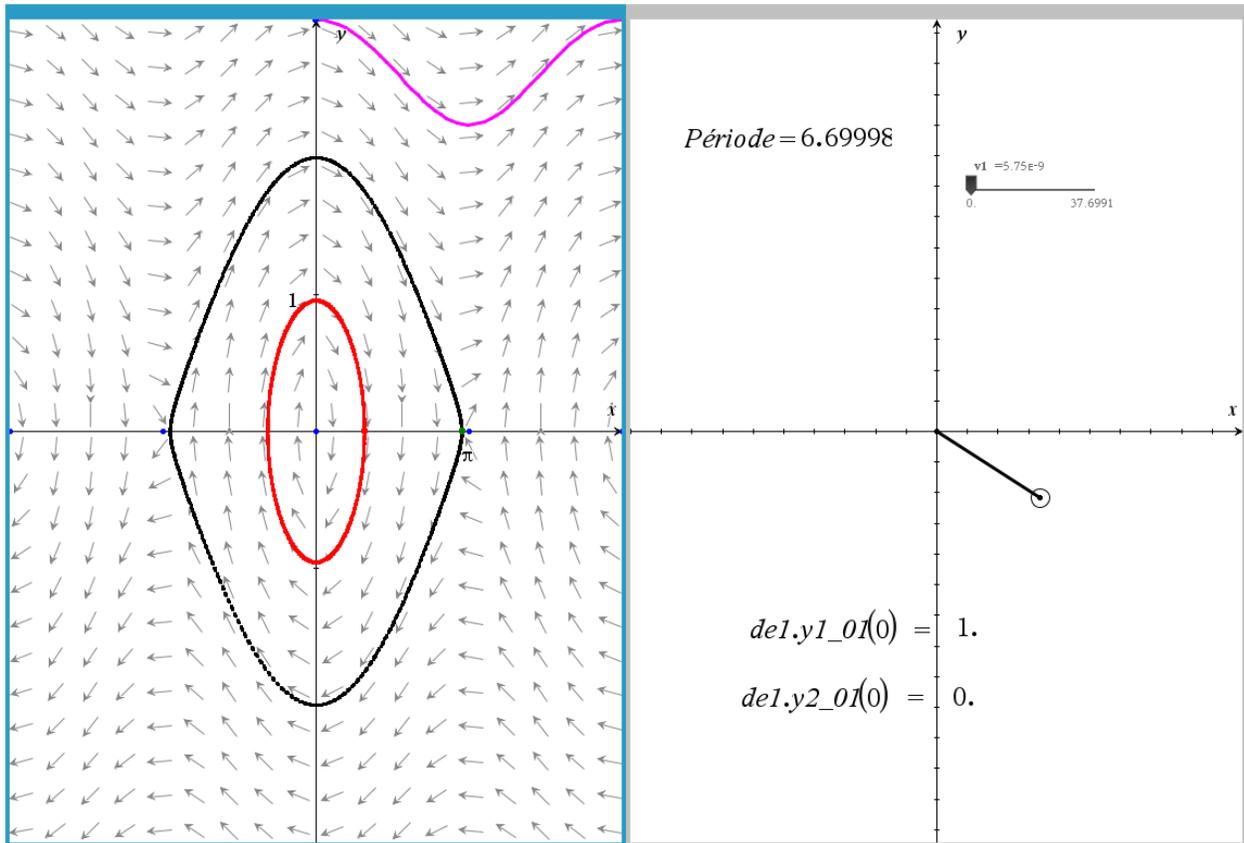


Figure 4.13

Liste d'exercices pour le résumé 2

Problème 1 Calcul de valeurs propres, de vecteurs propres et d'exponentielle de matrices. Pour chacune des matrices \mathbf{A} :

a) Trouvez le spectre (= ensemble des valeurs propres) et des vecteurs propres associés.

b) Calculez ensuite la matrice exponentielle $e^{\mathbf{A}t}$ ($t \in \mathbb{R}$).

c) Vérifiez votre réponse en b) en testant si $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$ et $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ lorsque $\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}$.

d) Essayez aussi de trouver une formule générale pour une puissance entière positive de chacune des matrices. Donc essayez de trouver une formule pour \mathbf{A}^k , $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & -15 \\ 10 & 5 & -30 \\ -5 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 4 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

Problème 2 Système d'É.D. provenant d'un problème de réservoirs. Le réservoir A contient initialement 100 gal d'eau pure tandis que le réservoir B contient 100 gal d'eau mélangée avec 90 lb de sel. Les 2 réservoirs sont reliés entre eux (voir figure) et on maintient le mélange uniforme par brassage. Résolvez cet exercice en trouvant la quantité de sel dans chacun des réservoirs ($x_1(t)$ et $x_2(t)$) de 2 façons différentes :

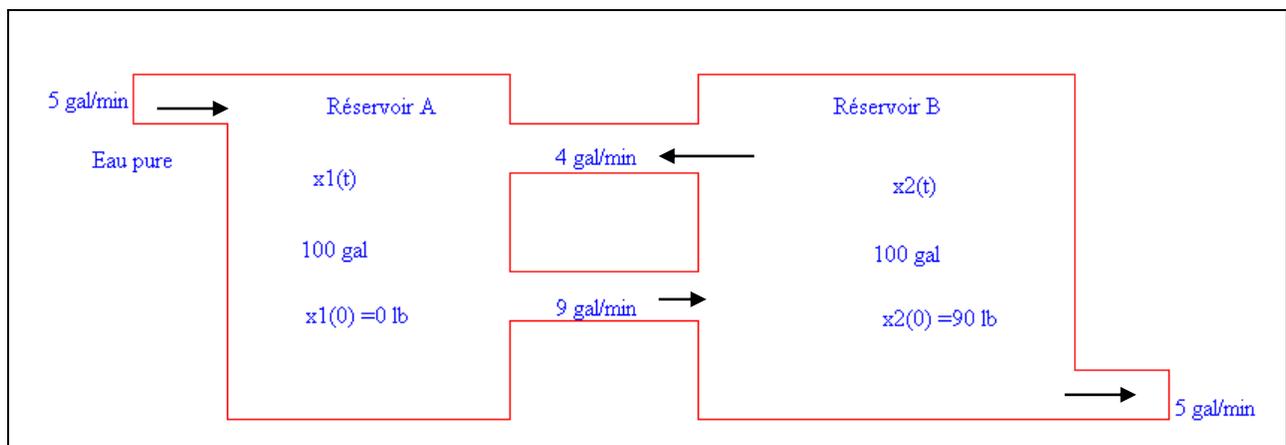


Figure pour le problème 2

- Trouvez la solution exacte $(x_1(t), x_2(t))$ en utilisant la technique des transformées de Laplace.
- Trouvez (encore) la solution exacte en utilisant les techniques de vecteurs propres.
- Esquissez les 3 graphiques suivants, chacun dans une fenêtre appropriée $(t, x_1(t))$, $(t, x_2(t))$ et (x_1, x_2) .
- Comparez le graphique de (x_1, x_2) avec celui du plan de phase généré par une méthode numérique robuste (RK par exemple).
- Reprenez cet exercice en supposant que l'entrée au taux de 5 gal/min est une solution saline de concentration 2 lb/gal plutôt que d'être de l'eau pure.

Problème 3 Système d'É.D. provenant d'un problème de réservoirs. Chaque réservoir (voir figure plus loin) contient 50 L de liquide et les 2 réservoir sont reliés entre eux tel qu'indiqué, avec les informations requises pour les débits. Le réservoir A contient initialement 25 kg de sel tandis que le réservoir B n'en contient pas (seulement de l'eau). On maintient le mélange uniforme par brassage. Résolvez cet exercice en trouvant la masse de sel dans chacun des réservoirs $(x_1(t)$ et $x_2(t))$ de 2 façons différentes :

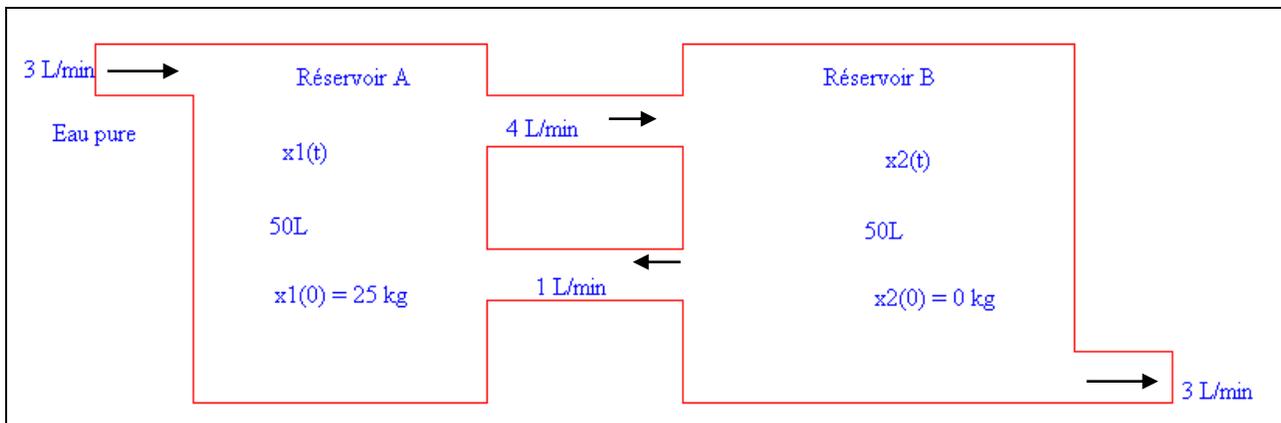


Figure pour le problème 3

- Trouvez la solution exacte $(x_1(t), x_2(t))$ en utilisant la technique des transformées de Laplace.
- Trouvez (encore) la solution exacte en utilisant les techniques de vecteurs propres
- Esquissez les 3 graphiques suivants, chacun dans une fenêtre appropriée :

$$(t, x_1(t)), (t, x_2(t)) \text{ et } (x_1, x_2).$$

- Comparez le graphique de (x_1, x_2) avec celui du plan de phase généré par une méthode numérique robuste.
- Reprenez cet exercice en supposant que l'entrée au taux de 3L/min est une solution saline de concentration 0.1 kg/L plutôt que d'être de l'eau pure.

Problème 4 Une application des matrices symétriques : la classification de coniques. Trouvez la nature de la courbe conique (possiblement une paire de droites) en transformant la forme quadratique :

a) $-11x_1^2 + 84x_1 x_2 + 24x_2^2 = 156$

b) $41x_1^2 - 24x_1 x_2 + 34x_2^2 = 10$

c) $4x_1^2 + 12x_1 x_2 + 13x_2^2 = 16$

d) $3x_1^2 + 10x_1 x_2 + 12x_2^2 + 10x_1 + 10x_2 = 3$

(indice pour **d**) : effectuez un changement de variable pour éliminer les termes linéaires)

Vérifiez vos réponses en faisant tracer, sur l'ordinateur, les courbes implicites ci-haut.

Problème 5 Une application des matrices de rotation : générer un tore.

La matrice suivante

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en est une de rotation autour de l'axe des z , d'un angle de θ radians, sens anti-horaire. Utilisez cette matrice et le cercle, situé dans le plan $y = 0$, centré au point $(2, 0, 0)$ et de rayon 1, afin de générer un tore. Les 2 paramètres de votre surface seront donc la paramètre du cercle et celui de la matrice de rotation ci-haut.

Problème 6 Systèmes linéaires mais non homogènes.

Utiliser un système symbolique pour trouver les solutions à chacun des systèmes suivants.

a)
$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 4y_2 - t^2 + 6t & y_1(0) = 2 \\ y_2' = y_1 + y_2 - t^2 + t - 1 & y_2(0) = -1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 - 2e^{-t} \\ y_2' = -y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

c)
$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} -9t \\ 0 \\ -18t \end{bmatrix}$$

d)
$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & -4 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 3t-1 \\ t^2 \\ 1 \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\text{f) } \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \text{ avec } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 & -3 \\ -18 & -1 & 0 & 0 \\ -9 & -3 & -25 & -9 \\ 33 & 10 & 90 & 32 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-t} \\ 0 \\ 2t \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Problème 7 Exponentielle de matrice. En indiquant votre démarche, calculez $e^{\mathbf{A}t}$ pour chacune des matrices \mathbf{A} suivantes et vérifiez ensuite votre réponse en utilisant une fonction appropriée d'un système symbolique. Pour certaines des matrices, tentez de trouver une formule close pour une puissance entière \mathbf{A}^k , $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3/2 \\ -1/6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -6 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{f) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{g) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{h) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{i) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{j) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{k) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{l) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{m) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{n) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{o) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 3 & 2 & 0 \\ 15 & 10 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Problème 8 Points critiques et stabilité de systèmes linéaires autonomes. Déterminez le type et la stabilité du point critique. Trouvez ensuite la solution générale (méthode au choix) et tracez quelques trajectoires dans le plan de phase.

$$\text{a) } \begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 5y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y_1' = -6y_1 - y_2 \\ y_2' = -9y_1 - 6y_2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 5y_1 - y_2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} y_1' = -y_1 \\ y_2' = -5y_1 - y_2 \end{cases}$$

Problème 9 Soit \mathbf{A} une matrice 2×2 constante inversible. Si le système $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ possède un point de selle en $(0, 0)$, prouvez que le système $\mathbf{y}' = \mathbf{A}^2\mathbf{y}$ possède un noeud instable en $(0, 0)$.

Problème 10 Points critiques et stabilité de systèmes ou É.D. non linéaires mais linéarisés.

Déterminez le type et la stabilité de chacun des points critiques en linéarisant le système ou le système correspondant à l'É.D.

$$\text{a) } \begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = y_1 - y_1^3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y_1' = -4y_2 \\ y_2' = \sin(y_1) \end{cases}$$

$$\text{c) } y'' + y - \frac{1}{2}y^2 = 0$$

$$\text{d) } y'' - 9y + y^3 = 0$$

$$\text{e) } y'' + \cos y = 0$$

Problème 11 Un système non linéaire, celui de Lotka-Volterra. Considérons le système proie-prédateur suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(3 - y) \\ \frac{dy}{dt} = y(x - 3) \end{cases}$$

a) Le système étant autonome, obtenez une É.D. en x et y et résolvez-la.

b) Trouvez les points critiques du système. Ce système est-il quasi linéaire? Si oui, trouvez les points critiques du système linéaire associé et étudiez la nature et la stabilité des points critiques du système original.

c) En utilisant une méthode numérique robuste, approximez les populations des proies $x(t)$ et des prédateurs $y(t)$ sur l'intervalle $[0, 5]$ dans chacune des situations suivantes :

(i) $x(0) = 2, y(0) = 4$; (ii) $x(0) = 2, y(0) = 5$ et (iii) $x(0) = 2, y(0) = 7$.

Cela va permettre de voir ce qui se passe lorsque la population initiale des proies est fixée mais que celle des prédateurs augmente.

Problème 12 Un système non linéaire, celui de Lotka-Volterra. Considérons le système proie-prédateur suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - \frac{1}{2}xy \\ \frac{dy}{dt} = -2y + \frac{1}{4}xy \end{cases} \quad x(0) = 10, y(0) = 5$$

Tracez les graphiques de x et y en fonction du temps ainsi que le portrait de phase. Quelle semble être la nature du point critique $(8, 2)$?

Problème 13 Ressort non linéaire. Trouvez et classifiez les points critiques pour chacune des équations différentielles du deuxième ordre suivantes.

a) $x'' + 20x - 5x^3 = 0$

b) $x'' + 2x' + 20x - 5x^3 = 0$

c) $x'' + 4x - 5x^3 + x^5 = 0$

Problème 14 Bifurcations. Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varepsilon x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + \varepsilon y \end{cases}$$

a) Montrez que le point critique $(0, 0)$ est une spirale stable si $\varepsilon < 0$, un centre si $\varepsilon = 0$ et une spirale instable de si $\varepsilon > 0$. Donc, de petites perturbations du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

peuvent changer à la fois le type et la stabilité du point critique. Illustrez cela avec les valeurs suivantes de ε : $-0.2, -0.05, 0, 0.05$ et 0.2 et tracez les trajectoires dans une fenêtre comme, par exemple, $-1 < x, y < 1$.

Problème 15 Bifurcations. Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + \varepsilon y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$

Montrez que le point critique $(0, 0)$ est une spirale stable si $\varepsilon < 0$, un noeud stable si $0 \leq \varepsilon < 1$. Donc, de petites perturbations du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$

peuvent changer le type du point critique $(0, 0)$ sans en changer la stabilité.

Problème 16 Systèmes quasi linéaires. Pour chacun des systèmes quasi linéaires suivants, montrez que l'origine est un point critique et étudiez-en la stabilité.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y + x y^2 \\ \frac{dy}{dt} = -7x - 2y - 7x^2 y \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x^2 y^3 \\ \frac{dy}{dt} = x - x^3 y^2 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + x^3 \\ \frac{dy}{dt} = x - y^3 \end{cases} \end{array}$$

Problème 17 Systèmes quasi linéaires. Pour chacun des systèmes quasi linéaires suivants, déterminez les points critiques, classifiez-les ou dites pourquoi on ne peut se commettre. Générez finalement un portrait de phase du système.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + x^2 \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 12y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y + x^3 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y + y^2 \\ \frac{dy}{dt} = -4x + y \end{cases} \end{array}$$

Problème 18 Oscillations non linéaires.

Soit l'É.D.O gouvernant des oscillations non linéaires

$$y'' + \left(\frac{1-y^2}{10} \right) y' + y = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0.$$

Utilisez une méthode numérique robuste pour montrer que, lorsque le temps augmente de 0 à 20, la solution $y(t)$ exhibe des oscillations qui s'amortissent lorsque $y_0 = 1$ et des oscillations qui prennent de l'expansion lorsque $y_0 = 3$.

Problème 19 Ressort non linéaire, équation de Duffing.

Il s'agit d'un modèle pour les vibrations d'une masse attachée à un ressort non linéaire :

$$y'' + \omega_0^2 y + r y^3 = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = 0.$$

où r est un paramètre constant et où $\omega_0 > 0$. Pour ce modèle, on cherche à savoir si la période de vibration varie lorsque le paramètre r varie et si la période de vibration varie lorsque les conditions initiales varient.

(On sait que si $r = 0$, alors la solution est $y = a \cos(\omega_0 t)$ et donc la période de vibration est $\frac{2\pi}{\omega_0}$, l'amplitude est a et la période de vibration est ainsi indépendante des conditions initiales.

En utilisant une méthode numérique robuste, approximez la solution pour les valeurs $r = 1$ et $r = 2$ ainsi que pour les valeurs $a = 1, 2$, et 3 .

Problème 20 Pendule non linéaire avec force d'amortissement.

Considérons la force d'amortissement proportionnelle à la vitesse, donc, selon l'exemple 4.13, on peut écrire ($\theta = x$)

$$m L x'' = -m g \sin x - c x' \quad (c > 0).$$

Si, de plus, il y a présence de force extérieure, alors on aboutit à l'É.D.

$$m L x'' + c x' + m g \sin x = f(t).$$

L'exercice suivant montre qu'il y a toute une différence entre le pendule linéaire et celui non linéaire.

a) Trouvez la solution en régime permanent pour le problème

$$x'' + 0.2x' + x = A \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0$$

et remarquez que l'amplitude de ce régime permanent est quintuplée si vous quintuplez A . Illustrez tout cela en prenant $A = 0.5$ et ensuite $A = 2.5$ et tracez le graphe de la solution $x(t)$ sur l'intervalle $0 < t < 80$ dans chacun des 2 cas.

Mais cela n'est pas le cas pour le problème non linéaire. En effet :

b) Tracez le graphe de la solution $x(t)$ (obtenue de façon numérique) du problème

$$x'' + 0.2x' + \sin x = A \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0$$

Prenez les valeurs $A = 0.5$ et ensuite $A = 2.5$, encore sur l'intervalle $0 < t < 80$. Remarquez la nature complètement différente lorsque A passe de 0.5 à 2.5 ici.

Problème 21 Linéaire versus non linéaire.

A) Considérons le problème

$$x'' + c x' + \omega^2 x = f(t), \quad x(0) = x_0, x'(0) = v_0$$

où c est une constante et où $\omega \neq 0$. On sait que la solution du problème peut s'écrire sous la forme $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ où x_h est la solution de l'équation complémentaire ($x'' + c x' + \omega^2 x = 0$) et où x_p est une solution particulière dépendant de f . Utilisez vos connaissances afin de démontrer les résultats suivants :

a) Si $c > 0$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} x_h(t) = 0$. Donc, la solution complémentaire peut être vue comme le terme transitoire.

b) Si f est une combinaison linéaire de sinus et de cosinus et de période T , alors la solution particulière, appelée solution en régime permanent ou « steady state » et dénotée $x_{ss}(t)$, est aussi périodique de période T . L'amplitude de $x_{ss}(t)$ dépend de c , ω^2 et f mais ne dépend pas des conditions initiales.

c) La solution complémentaire x_h dépend des conditions initiales, de c et de ω^2 .

B) Considérons maintenant le problème non linéaire suivant :

$$x'' + 0.2x' + \sin x = \cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

Pour chacune des conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & x'(0) &= 0, \\ x(0) &= 0, & x'(0) &= 0.1, \\ x(0) &= 0.1, & x'(0) &= 0.1, \end{aligned}$$

tracez le graphique de la solution $x(t)$ sur l'intervalle $0 < t < 280$. Remarquez la valeur de l'amplitude lorsque $x(t)$ tend vers $x_{ss}(t)$ et trouvez le temps requis pour que $x_{ss}(t)$ soit atteint.

Cela devrait être très différent du problème $x'' + 0.2x' + x = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$.